Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zu $N \in \mathbb{N}$ setze

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$

Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (*unendliche*) *Reihe* und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{N\to\infty} s_N$ der *Reihenwert* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und wird bezeichnet durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Satz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{absolut konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent}$$

Untersuchung von Reihen auf Konvergenz:

1) Berechne die Folge (s_N) und prüfe, ob (s_N) konvergiert.

2) Benutze Konvergenzkriterien für Reihen:

Leibnizkriterium für alternierende Reihen
Majoranten- und Minorantenkriterium
Wurzelkriterium
Quotientenkriterium

Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Sei (b_n) eine *monoton fallende* Folge mit $b_n \to 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$.

Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(1) Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Wurzelkriterium

Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Quotientenkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.