Differentialgleichung erster Ordnung

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ Fkt.

Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \tag{D}$$

Anfangswertproblem (gegeben $(x_0, y_0) \in I \times J$):

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{AWP}$$

Lösung von (D):
$\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ d'bar, $\tilde{I} \subseteq I$ Int., $\phi(x) \in J$ f.a. $x \in \tilde{I}$,

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

Lösung von (AWP):
Lösung $\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ von (D) mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $\phi(x_0) = y_0$.

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in C(I)$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

homogene Gleichung

$$y' = a(x)y \tag{L1-hom}$$

inhomogene Gleichung

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{L1-inhom}$$

alle Lösungen von (L1-inhom):

$$\phi = \phi_P + z,$$

wobei ϕ_P *spezielle* (partikuläre) Lösung von (L1-inhom), z durchläuft alle Lösungen von (L1-hom).

Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{L1}$$

AWP eindeutig lösbar, maximale Lösung $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\, ds, \quad x \in I,$$

wobei $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$, $x \in I$.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung
$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a_0, a_1, b \in C(I)$, $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

homogene Gleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{L2-hom}$$

inhomogene Gleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{L2-inhom}$$

alle Lösungen von (L2-inhom):

$$\phi = \phi_P + z,$$

wobei ϕ_P *spezielle* (partikuläre) Lösung von (L2-inhom),
z durchläuft alle Lösungen von (L2-hom).

Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= b(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1. \end{aligned} \tag{L2}$$

AWP eindeutig lösbar.

Lineare Dgl. zweiter Ordnung
mit konstanten Koeffizienten

inhomogene Gleichung $(a_0, a_1 \in \mathbb{R})$

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, führt auf die Gleichung

$$\underbrace{\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}_{:=p(\lambda)} = 0,$$

Lösungen $\lambda_{1/2}$ sind Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

Allgemeine Lösung z von (L2-hom):

$$z(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und ϕ_1, ϕ_2 folgende Lösungen von (L2-hom):

(i) falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ verschieden

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \phi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

(ii) falls $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \phi_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$$

(iii) falls $\lambda_{1/2} = \sigma \pm i\omega$ mit $\omega \neq 0$

$$\phi_1(x) = e^{\sigma x}\cos(\omega x), \quad \phi_2(x) = e^{\sigma x}\sin(\omega x)$$