Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
15.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass für beliebige Aussagen A, B und C gilt:

a) $\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A) \lor (\neg B)$

b) $A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$ und $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$

c) $[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \land B) \lor ((\neg A) \land (\neg B))]$

Aufgabe 2

a) Sie habe Ihre drei Bekannten Albert, Betti und Carla zu sich eingeladen und wissen Folgendes:

- Wenn Carla nicht kommt, kommt auch Betti nicht.
- Betti oder Carla kommt, nicht aber beide.
- Entweder kommen sowohl Albert als auch Carla oder beide kommen nicht.

Es seien A, B bzw. C die Aussage, dass Albert, Betti bzw. Carla kommt.

i) Drücken Sie die drei bekannten Tatsachen mittels dieser Aussagen und logischer Verknüpfungen aus.

ii) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, wer kommt.

b) Negieren Sie folgende Aussagen:

i) Wenn morgen schönes Wetter ist, gehen alle Studierenden in den Schlossgarten.

ii) Es gibt einen Menschen, dem Mathematik keinen Spaß macht.

Aufgabe 3

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen.

a) Zeigen Sie: Sind $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$, so gilt $M_1 \subset M_3$.

b) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   i) $M_1 \subset M_2$ ii) $M_1 \cap M_2 = M_1$ iii) $M_1 \cup M_2 = M_2$

c) Sei I eine beliebige Indexmenge und für $\iota \in I$ sei $A_\iota \subset X$ mit Komplement $A_\iota^c = X \setminus A_\iota$. Zeigen Sie:

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \right)^c = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota^c.$$

Aufgabe 4

a) Sei M eine Menge von Aussagen. Auf M sei eine Relation $\sim$ definiert durch $A \sim B :\Leftrightarrow [A \Leftrightarrow B]$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

b) Auf $\mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ definiert durch $x \sim y :\Leftrightarrow |x - y| \leq 5$. Untersuchen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 5

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \quad &, \quad f(x) = 1 + \frac{x}{1-x}, \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &, \quad g(x) = \frac{1}{|x|+1} \\ h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad &, \quad h(x) = x + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie jede der Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.