Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
15.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass für beliebige Aussagen A, B und C gilt:

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

b) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

c) $[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))]$

Lösung:

a)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Da die Wahrheitswerte in der vierten und in der siebten Spalte übereinstimmen, ist $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ gezeigt.

b)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Da die Wahrheitswerte in der fünften und in der achten Spalte übereinstimmen, ist $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ gezeigt.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Da die Wahrheitswerte in der fünften und in der achten Spalte übereinstimmen, ist $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ gezeigt.

c)

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

Da die Wahrheitswerte in der dritten und in der achten Spalte übereinstimmen, ist $[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))]$ gezeigt.

Aufgabe 2

a) Sie habe Ihre drei Bekannten Albert, Betti und Carla zu sich eingeladen und wissen Folgendes:

- Wenn Carla nicht kommt, kommt auch Betti nicht.
- Betti oder Carla kommt, nicht aber beide.
- Entweder kommen sowohl Albert als auch Carla oder beide kommen nicht.

Es seien A, B bzw. C die Aussage, dass Albert, Betti bzw. Carla kommt.

i) Drücken Sie die drei bekannten Tatsachen mittels dieser Aussagen und logischer Verknüpfungen aus.

ii) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, wer kommt.

b) Negieren Sie folgende Aussagen:

i) Wenn morgen schönes Wetter ist, gehen alle Studierenden in den Schlossgarten.

ii) Es gibt einen Menschen, dem Mathematik keinen Spaß macht.

Lösung:

a) i) Die drei bekannten Tatsachen lassen sich wie folgt ausdrücken und umformen:

$[(\neg C) \Rightarrow (\neg B)] \Leftrightarrow [B \Rightarrow C]$ (nach Vorlesung)
$[(B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg B) \wedge C)] \Leftrightarrow [B \Leftrightarrow (\neg C)]$ (nach 1 c))
$[(A \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg C))] \Leftrightarrow [A \Leftrightarrow C]$ (nach 1 c))

ii)

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$\neg C$	$B \Leftrightarrow (\neg C)$	$A \Leftrightarrow C$
w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	f
w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f
f	f	f	w	w	f	w

Nur in der dritten Zeile liefern alle drei Ausdrücke $B \Rightarrow C$, $B \Leftrightarrow (\neg C)$ und $A \Leftrightarrow C$ den Wert "wahr"; also lautet die Lösung: Albert und Carla kommen, Betti nicht.

b) i) Es sei A die Aussage "Morgen ist schönes Wetter" und B die Aussage "Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten". Wir müssen $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A) \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: "Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht."

ii) Wir wollen die Aussage

$$\exists x \text{ mit } A(x) : B(x)$$

negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch

$$A(x) : \text{"}x \text{ ist ein Mensch."}$$
$$B(x) : \text{"Mathematik macht } x \text{ keinen Spaß."}$$

gegeben sind. Wegen $\neg(\exists x \text{ mit } A(x).B(x)) \Leftrightarrow (\forall x \text{ mit } A(x) : \neg B(x))$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: "Allen Menschen macht Mathematik Spaß".

Aufgabe 3

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen.

a) Zeigen Sie: Sind $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$, so gilt $M_1 \subset M_3$.

b) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) $M_1 \subset M_2$ ii) $M_1 \cap M_2 = M_1$ iii) $M_1 \cup M_2 = M_2$

c) Sei I eine beliebige Indexmenge und für $\iota \in I$ sei $A_\iota \subset X$ mit Komplement $A_\iota^c = X \setminus A_\iota$. Zeigen Sie:

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \right)^c = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota^c.$$

Lösung:

a) Sei $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ gilt $x \in M_2$. Wegen $M_2 \subset M_3$ gilt damit auch $x \in M_3$. Es folgt $M_1 \subset M_3$.

b) i)$\Rightarrow$ii): Es gilt stets $M_1 \supset M_1 \cap M_2$. Sei nun $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ gilt $x \in M_2$. Es folgt $x \in M_1 \cap M_2$, also $M_1 \subset M_1 \cap M_2$. Somit gilt $M_1 \cap M_2 = M_1$.

   ii)$\Rightarrow$iii): Es gilt stets $M_1 \cup M_2 \supset M_2$. Zu zeigen ist noch $M_1 \cup M_2 \subset M_2$. Sei dazu $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1$, so folgt aus ii), dass $x \in M_2$, was zu zeigen war.

   iii)$\Rightarrow$i): Sei $x \in M_1$. Nach iii) ist $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$, was zu zeigen war.

c) Es gilt für jedes $x \in X$:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\iota \in I} A_\iota \quad &\Leftrightarrow \quad \exists j \in I : x \notin A_j \\ &\Leftrightarrow \quad \exists j \in I : x \in A_j^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota^c. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Sei M eine Menge von Aussagen. Auf M sei eine Relation $\sim$ definiert durch $A \sim B :\Leftrightarrow [A \Leftrightarrow B]$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

b) Auf $\mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ definiert durch $x \sim y :\Leftrightarrow |x - y| \leq 5$. Untersuchen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung:

a) Seien $A, B, C \in M$. Es gilt stets $A \Leftrightarrow A$. Gilt $A \Leftrightarrow B$, so auch $B \Leftrightarrow A$. Aus $A \Leftrightarrow B$ und $B \Leftrightarrow C$ folgt außerdem $A \Leftrightarrow C$. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

   (Ausführlicher mit Wahrheitstafeln. Zu zeigen ist dazu, dass die Aussagen $A \Leftrightarrow A$, $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$ und $[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ stets wahr sind.)

b) Die Relation $\sim$ ist keine Äquivalenzrelation, denn sie ist nicht transitiv: Sei z.Bsp. $x = 0$, $y = 5$, $z = 10$. Dann gilt $|x - y| \leq 5$ und $|y - z| \leq 5$, jedoch $|x - z| = 10 > 5$.

Aufgabe 5

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \quad &, \quad f(x) = 1 + \frac{x}{1-x}, \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &, \quad g(x) = \frac{1}{|x| + 1} \\ h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad &, \quad h(x) = x + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie jede der Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Lösung:
Die Funktion f ist injektiv: Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x(1-y) = y(1-x) \Leftrightarrow x - xy = y - xy \Leftrightarrow x = y.$$

Ferner ist f surjektiv: Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Dann ist $x := \frac{a-1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und es gilt

$$f(x) = f(\frac{a-1}{a}) = 1 + \frac{\frac{a-1}{a}}{1 - \frac{a-1}{a}} = a.$$

Da f injektiv und surjektiv ist, ist folglich f auch bijektiv.

Wegen $g(-1) = g(1)$ ist g nicht injektiv. Ferner gilt $0 < g(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist g auch nicht surjektiv. Schließlich ist g somit auch nicht bijektiv.

Für $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq y$ gilt $x + \sqrt{2} \neq y + \sqrt{2}$. Also ist h injektiv. Wäre h surjektiv, so gäbe es insbesondere ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $h(x) = 2\sqrt{2}$. Wegen $h(x) = x + \sqrt{2}$ folgt daraus aber $x = \sqrt{2}$, im Widerspruch zu $x \in \mathbb{Q}$. Also ist h nicht surjektiv. Damit ist h auch nicht bijektiv.