Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
22.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|x-4| = |x+1|$,

b) $|2x| > |5-2x|$,

c) $\big|2-|2-x|\big| \leq 1$,

d) $|x+1| + |x-1| > 2$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 10x = 15 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) Die Bedingung $|2x| > |5-2x|$ impliziert $x \neq 0$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < \frac{5-2x}{2x} = \frac{5}{2x} - 1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{5}{2x} < 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \big|2-|2-x|\big| \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 \leq 2 - |2-x| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq -|2-x| \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq |2-x| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq 2-x \leq 3 \text{ oder } -3 \leq 2-x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leq -x \leq 1 \text{ oder } -5 \leq -x \leq -3 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 1 \text{ oder } 3 \leq x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \cup [3,5]. \end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \;\Leftrightarrow\; -2x > 2 \;\Leftrightarrow\; x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \;\Leftrightarrow\; 2x > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \;\Leftrightarrow\; x < -1 \text{ oder } x > 1 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie für alle reellen Zahlen $a > 0$ die Ungleichung

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

und zeigen Sie weiter, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = 1$ ist.

b) Beweisen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.$$

Lösung:

a) Für $a > 0$ gilt

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; a^2 - 2a + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a-1)^2 \geq 0.$$

Man sieht sofort:

$$a + \frac{1}{a} = 2 \;\Leftrightarrow\; (a-1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 1.$$

b) Für $k = 1$ gilt:

$$\binom{x+1}{1} = \frac{x+1}{1} = x + 1 = \binom{x}{0} + \binom{x}{1}.$$

Für $k \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1} &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)}{k!} + \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+2)}{(k-1)!} \\
&= \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)}{k!} + \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+2) \cdot k}{k!} \\
&= \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+2) \cdot [x-k+1+k]}{k!} \\
&= \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x+1-k+1)}{k!} \\
&= \binom{x+1}{k}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a)
$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie $\frac{a}{1+a} = \frac{a+1-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ für $a \neq -1$.)

b)
$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Dabei ist

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \min\{a, b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{sonst} \end{cases}.$$

c)
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

Lösung:

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leq |x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung) erhalten wir

$$0 < 1 \leq 1 + |x+y| \leq 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \geq \frac{1}{1+|x|+|y|} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{1+|x+y|} \leq -\frac{1}{1+|x|+|y|}$$

folgt. Damit und mit zweimaliger Verwendung des Hinweises kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \leq 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned}
& |x| + |y| \geq |x| \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 + |x| + |y| \geq 1 + |x| \geq 1 > 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{1+|x|+|y|} \leq \frac{1}{1+|x|} \\
\Rightarrow \quad & \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}.
\end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geq 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geq y$. Dann ist $|x-y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}, \\
\frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}.
\end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x + y$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\}, \\
\frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}.
\end{aligned}$$

c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Mit der Dreiecksungleichung gilt für $a, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| - |b| \leq |a|$. Setzt man speziell $a := x - y$, $b := y$, so erhält man

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Setzt man $a := x - y$, $b := -x$, so erhält man

$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$

Insgesamt folgt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

c) Folgern Sie aus Teil b) die geometrische Summenformel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Lösung:

a) Mit der Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$a - b = (a-b)a^0 b^0 = (a-b)\sum_{k=0}^{0} a^{1-1-k}b^k.$$

Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \qquad \text{(IV)}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{(n+1)-1} a^{(n+1)-1-k}b^k &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \\
&= (a-b)\left(a\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k + a^0 b^n\right) \\
&= a(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k + (a-b)b^n \\
&\overset{\text{IV}}{=} a(a^n - b^n) + (a-b)b^n = a^{n+1} - b^{n+1}.
\end{aligned}$$

c) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir setzen $a = 1$ und $b = q$ in b) ein und erhalten

$$1^n - q^n = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k} q^k = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Da $q \neq 1$ ist, folgt hieraus $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, gilt:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Gleichung $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.)

b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - \sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x - (x-1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{da } x \geq 1.
\end{aligned}$$

b) Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über n. Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}.$$

Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen (IV). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&\overset{\text{IV}}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&\geq \sqrt{n+1} \quad \text{nach Teil a)}.
\end{aligned}$$