Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
29.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ dar:

$$i^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3, \quad \sqrt{i}.$$

b) Sei $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Man zeige, dass mit

$$x = \sqrt{\frac{|c|+a}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{|c|-a}{2}},$$

die Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ durch

$$z_\pm = \begin{cases} \pm(x+iy) & \text{falls } b \geq 0 \\ \pm(x-iy) & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

gegeben sind.

c) Man zeige: Die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{C})$ lässt sich durch quadratische Ergänzung in eine Gleichung wie in b) überführen.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i|\}$;

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 - 2i| < 3\}$;

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$.

Aufgabe 3

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $\left\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\right\}$

Aufgabe 4

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $a > \sup A - \varepsilon$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass auch

$$A + B := \{a + b : a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a + b\}$$

eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Aufgabe 5

Man zeige:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$