Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
29.10.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ dar:

$$i^n \ (n \in \mathbb{N}), \qquad \frac{1-i}{1+i}, \qquad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3, \qquad \sqrt{i}.$$

b) Sei $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Man zeige, dass mit

$$x = \sqrt{\frac{|c|+a}{2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{|c|-a}{2}},$$

die Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ durch

$$z_\pm = \begin{cases} \pm(x+iy) & \text{falls } b \geq 0 \\ \pm(x-iy) & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

gegeben sind.

c) Man zeige: Die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{C})$ lässt sich durch quadratische Ergänzung in eine Gleichung wie in b) überführen.

Lösung:

a)

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k \\ i & \text{falls } n = 4k+1 \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2 \\ -i & \text{falls } n = 4k+3 \end{cases}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

Es gilt

$$\sqrt{i}=x+iy \Leftrightarrow i=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy \Leftrightarrow x^2=y^2 \text{ und } 2xy=1.$$

Es folgt $x=\pm y$ und $2xy=1$. Da $x\in\mathbb{R}$ folgt $x=y$ und $2x^2=1$, und damit $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Schließlich erhalten wir $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x=y$, also

$$\sqrt{i}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

b) Wir schreiben $z=x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z^2=c=a+ib \;&\Rightarrow\; (x+iy)^2=a+ib\\
&\Rightarrow\; x^2-y^2=\mathrm{Re}[(x+iy)^2]=a,\quad 2xy=\mathrm{Im}[(x+iy)^2]=b\\
&\;\; \text{und } x^2+y^2=|z|^2=|z^2|=|c|\\
&\Rightarrow\; 2x^2=|c|+a,\quad 2y^2=|c|-a\\
&\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c|+a)},\quad y=\sqrt{\frac{1}{2}(|c|-a)}.
\end{aligned}$$

- $b\geq 0 \quad \Rightarrow 2xy\geq 0$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}(|c|+a)},\quad y=\sqrt{\frac{1}{2}(|c|-a)}$$

oder

$$x=-\sqrt{\frac{1}{2}(|c|+a)},\quad y=-\sqrt{\frac{1}{2}(|c|-a)}.$$

- $b<0 \quad \Rightarrow 2xy<0$

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}(|c|+a)},\quad y=-\sqrt{\frac{1}{2}(|c|-a)}$$

oder

$$x=-\sqrt{\frac{1}{2}(|c|+a)},\quad y=\sqrt{\frac{1}{2}(|c|-a)}.$$

Umgekehrt folgt durch Einsetzen, dass $z_\pm$ die geforderte Gleichung lösen!

c) Quadratisches Ergänzen:

$$0 = z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Mit $\tilde{z} = z + \frac{p}{2}$ und $-c = q - \frac{p^2}{4}$ gilt:

$$(\tilde{z})^2 = c.$$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i|\}$;

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 - 2i| < 3\}$;

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$.

Lösung:

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1 - i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3 + 3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\mathrm{Im}\ z = -\mathrm{Re}\ z + 2$.

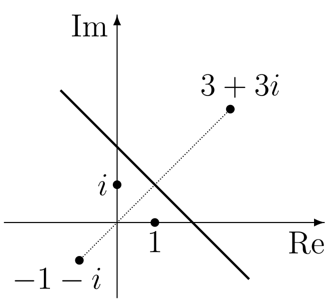
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1 + 2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

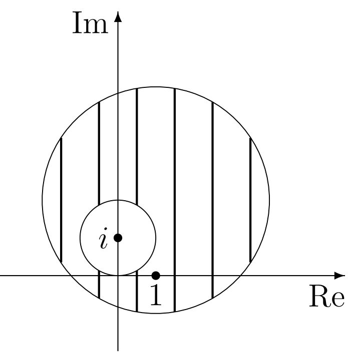
$$1 \geq \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}\big((x + iy)^2\big) = \mathrm{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leq 1 + y^2$, also $|x| \leq \sqrt{1 + y^2}$ bzw. $-\sqrt{1 + y^2} \leq x \leq \sqrt{1 + y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

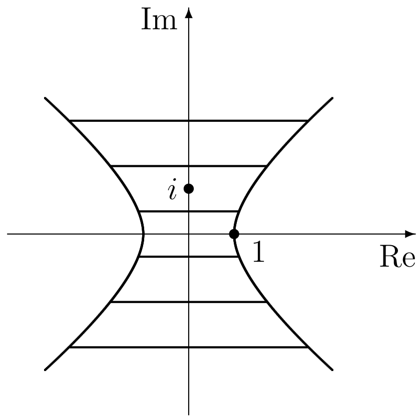
a)



b)



c)



Aufgabe 3

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $\left\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\right\}$

Lösung:

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen ≤ 0 ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geq (-1)^n \geq -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leq (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leq -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste

$$\forall x \in (0, 42] : \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in C$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

Aufgabe 4

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $a > \sup A - \varepsilon$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass auch

$$A + B := \{a + b : a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a + b\}$$

eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Lösung:

a) Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen es gäbe kein $a \in A$ mit $a > \sup A - \varepsilon$. Dann gilt $a \le \sup A - \varepsilon$ für alle $a \in A$. Also ist $\sup A - \varepsilon$ eine obere Schranke für A, und es gilt $\sup A - \varepsilon < \sup A$. Dies aber ist ein Widerspruch dazu, dass $\sup A$ die kleinste obere Schranke für A ist.

b) Zunächst zum Supremum: Da A und B nichtleer und beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A+B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A+B) = \alpha+\beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A+B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.

Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \le \alpha$ und $b \le \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \le \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \le \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.

Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.

Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma-\alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma-b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.

Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \ne M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A + B) &= -\sup\big(-(A + B)\big) = -\sup\big((-A) + (-B)\big) = -\big(\sup(-A) + \sup(-B)\big)\\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Man zeige:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{n!}{n^n} \geq 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

b) Da $-\frac{1}{n^2} \geq -1$, gilt mit der Bernoulli-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &\geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \to 1 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Wegen $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.