Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
05.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$

d) $a_n = \frac{(1+n)^{42}-n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = n^4\left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1\right)$

f) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

Aufgabe 2

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3

Es sei $0 < a < b$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden rekursiv durch $a_1 = a$, $b_1 = b$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad \text{definiert.}$$

Man zeige:

a) $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $b_{n+1} - a_{n+1} \le \frac{1}{4a}(b_n-a_n)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{ab}$.

Aufgabe 4

a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

  i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.

  ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

  iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

  iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2012, ist aber nicht monoton.

  v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

  i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; ii) $|a_n| < 2\varepsilon^2$; iii) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; iv) $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$;

  v) $|a_n a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf_{n\to\infty}(a_n)$ und $\limsup_{n\to\infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$ b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 6

a) Sei $0 \leq q < 1$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|x_{n+1} - x_n| \leq q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

b) Man zeige, dass die durch $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$ rekursiv definierte Folge eine Cauchy-Folge ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie Teil a))