Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
05.11.2012

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**

**4. Übungsblatt**

## Aufgabe 1

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$

d) $a_n = \frac{(1+n)^{42}-n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = n^4\left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1\right)$

f) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

**Lösung:**

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2n} = 1+\frac{1}{2n} \to 1$ $(n\to\infty)$ und $a_{2n+1} = -1+\frac{1}{2n+1} \to -1$ $(n\to\infty)$ besitzt die Folge $(a_n)$ die zwei Häufungswerte 1 und $-1$. Daher ist $(a_n)$ divergent.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2-v^2$, also $u-v = (u^2-v^2)/(u+v)$ für $u+v\neq 0$, ergibt sich

$$a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n = \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$
$$= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}.$$

d) Der Binomialsatz liefert für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}n^k = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{42}n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42}-n^{42} = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{41}n^{41}$. Folglich ist

$$a_n = \frac{\alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{40}n^{40}+\alpha_{41}n^{41}}{n^{41}}$$
$$= \frac{\alpha_0}{n^{41}}+\frac{\alpha_1}{n^{40}}+\ldots+\frac{\alpha_{40}}{n}+\alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42.$$

e) Wir verwenden die geometrische Summenformel

$$u^m - v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k}v^k = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \ldots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \ (*)$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n - 1) \overset{(*)}{=} n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{n^4(3n^{-4} + n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{3 + n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1}.$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le a_n \le \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

**Aufgabe 2**

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

**Lösung:**

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann ist $(a_n)$ beschränkt und $(b_n)$ konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da $(a_n)$ beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le K|b_n|.$$

Wegen $b_n \to 0$ konvergiert $|b_n| \to 0$ und auch $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Es folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

**Aufgabe 3**

Es sei $0 < a < b$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden rekursiv durch $a_1 = a$, $b_1 = b$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{definiert.}$$

Man zeige:

a) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4a}(b_n - a_n)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{ab}$.

**Lösung:**

a) Induktiv sieht man leicht $a_n > 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)} \geq 0,$$

also $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. Mit $a_1 = a < b = b_1$ folgt induktiv auch $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt weiterhin

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n} \geq 0$$

und

$$b_n - b_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0.$$

Insgesamt folgt $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Aus Teil a) folgt $a \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere $a_n + b_n \geq 2a$. Damit gilt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2(a_n + b_n)}(b_n - a_n)^2 \leq \frac{1}{4a}(b_n - a_n)^2.$$

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben durch $b_1 = b$ beschränkt. Also gilt $a_n \to c \in \mathbb{R}^+$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten durch $a_1 = a$ beschränkt. Also gilt $b_n \to d \in \mathbb{R}^+$. Ferner gilt

$$d = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{c + d}{2},$$

also $c = d$. Induktiv zeigen wir nun, dass $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ gilt dies offensichtlich. Ist die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt, so folgt mit der Definition von $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n = ab,$$

womit die Induktion abgeschlossen ist. Es folgt

$$c^2 = cd = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab,$$

wegen $c > 0$ also $c = d = \sqrt{ab}$.

**Aufgabe 4**

a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

   i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und $-1$ als Häufungswerte.

   ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

   iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

   iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2012, ist aber nicht monoton.

   v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

   i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; ii) $|a_n| < 2\varepsilon^2$; iii) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; iv) $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$;

   v) $|a_n a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

**Lösung:**

a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

   i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   ii) $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots)$

   iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2012 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade $n$ und $e_n = n$ für ungerade $n$.

b) i) Es gilt $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$, also $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Die Folge $(a_n) = (\sqrt{n})$ erfüllt also die Voraussetzung. Allerdings ist $(a_n)$ divergent.

   ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\varepsilon = 2\delta^2$ für $\delta := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0$ so, dass für $n \geq n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.

   iii) Etwa $(a_n) = ((-1)^n)$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(a_n)$ ist jedoch divergent.

   iv) Die Folge $(a_n)$ mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.

   v) In diesem Fall ist $(a_n)$ konvergent mit Grenzwert Null. Wäre $(a_n)$ keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem $\varepsilon$ eine Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, für welche stets $|a_{k(n)}| \geq \sqrt{\varepsilon}$ wäre. Dann wäre aber stets $|a_{k(n)}^2| \geq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

## Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = (1+(-1)^n)^n$ b) $a_n = \begin{cases} 1+1/2^n, & n=3k \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \\ 2, & n=3k-1 \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \\ 2+(n+1)/n, & n=3k-2 \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \end{cases}$

**Lösung:**

a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = \left(1+(-1)^{2n}\right)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Also ist $(a_n)$ nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$. Weiter gilt

$$a_{2n+1} = \left(1+(-1)^{2n+1}\right)^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = 0 \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder $a_n$ in ihr liegen. Somit ist $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

b) Wegen $1+1/2^n \to 1$ und $2+(n+1)/n = 2+1+1/n \to 3$ für $n\to\infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

## Aufgabe 6

a) Sei $0 \le q < 1$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|x_{n+1}-x_n| \le q^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Man zeige: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

b) Man zeige, dass die durch $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ $(n\in\mathbb{N})$ rekursiv definierte Folge eine Cauchy-Folge ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie Teil a) )

**Lösung:**

a) Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0\in\mathbb{N} \ \ \forall k\in\mathbb{N} \ \ \forall n \ge n_0 : \quad |x_{n+k}-x_n| < \varepsilon.$

Für beliebige $k,n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} x_{n+k}-x_n &= x_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} x_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} x_{n+l+1}\right) - x_n \\ &\overset{j:=l+1}{=} x_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} x_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} x_{n+j}\right) - x_n \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} x_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} x_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1}(x_{n+j+1}-x_{n+j}). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}|x_{n+k} - x_n| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |x_{n+j+1} - x_{n+j}| \leq \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\ &= q^n \frac{1-q^k}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q}.\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leq q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^{n_0}}{1-q} < \varepsilon$. Demzufolge ist

$$|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}. \tag{0.1}$$

Hieraus folgt

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geq n_0.$$

[Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m > n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N}$ und nach (0.1) ergibt sich $|x_m - x_n| = |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$.]

b) Wir zeigen induktiv die Gleichung $|x_{n+1} - x_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Für $n = 0$ erhalten wir

$$|x_1 - x_0| = |1 - 0| = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$

Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt. Dann ist

$$\begin{aligned}|x_{(n+1)+1} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) - x_{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n| \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Damit erfüllt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzung aus Teil a) mit $q = \frac{1}{2}$ und ist somit eine Cauchy-Folge.