Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
12.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{k^2},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

Aufgabe 2

Es sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ ist auch konvergent.

Aufgabe 3

Die Reihe $B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ ($z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) heisst Binomialreihe. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ist $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$.

b) Im Fall $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergent.

c) Es gilt $B_\alpha(z) \cdot B_\beta(z) = B_{\alpha+\beta}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst mit vollständiger Induktion, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}.)$$

Aufgabe 4

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ konvergiert.

b) Man zeige: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$) ist genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$.

Aufgabe 5

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive, monoton fallende Nullfolge, deren Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Summe $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{2n}$.)

b) Es sei $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{nm}$, falls $2^m \leq n < 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, obwohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen Null konvergieren.

Aufgabe 6

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \frac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?