Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
12.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{k^2},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

Lösung:

i) Es gilt

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1})} = \frac{1}{2(k+1)}.$$

Damit ist

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} \to \infty \quad \text{für } N \to \infty.$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

ii) Setze $a_k := \frac{k!}{k^k}$. Damit ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \leq \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

da $(1+\frac{1}{k})^k \geq 1 + k \cdot \frac{1}{k} = 2$ (Bernoulli-Ungleichung). Also ist nach dem Quotientenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ absolut konvergent.

iii) Setze $a_k := \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{k^2}$. Damit ist

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \leq \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \text{(siehe ii))}.$$

Also ist nach dem Wurzelkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ absolut konvergent.

iv) Es ist $\frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} = (-1)^k a_k$, wobei $a_k := \frac{(k+1)^{k-1}}{k^k}$. Wir zeigen, dass a_k eine monoton fallende Nullfolge ist. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$ konvergent nach dem Leibnizkriterium. Dazu beachte

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1} &= \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \\ &\leq \frac{4}{k} \quad \text{nach Vorlesung} \end{aligned}$$

(genauer kann $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ nach oben durch die Eulersche Zahl e abgeschätzt werden). Also ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Weiterhin gilt

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)^k} = \frac{[(k+1)^2]^k}{[k(k+2)]^k} = \left(\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}\right)^k > 1.$$

Also ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, wie verlangt.

v) Wir setzen $a_k := \frac{(k!)^2}{(2k)!}$. Dann gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[(k+1)!]^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k+1}{2(2k+1)} \leq \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also ist nach dem Quotientenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ absolut konvergent.

Aufgabe 2

Es sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ ist auch konvergent.

Lösung:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Vektoren

$$\begin{aligned} a &:= (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}) \in \mathbb{R}^n, \\ b &:= (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$|\langle a, b\rangle| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k}.$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \leq \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 &= \left(\sqrt{\langle a,a\rangle}\right)^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
\|b\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ monoton wachsend und beschränkt. Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$.

Aufgabe 3

Die Reihe $B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ ($z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) heisst Binomialreihe. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ist $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$.

b) Im Fall $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergent.

c) Es gilt $B_\alpha(z) \cdot B_\beta(z) = B_{\alpha+\beta}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst mit vollständiger Induktion, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}.)$$

Lösung:

a) Die Aussage folgt direkt aus dem Binomischen Lehrsatz.

b) Wir setzen $a_k := \binom{\alpha}{k} z^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= |z| \left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}\right| \\
&= |z| \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \\
&\to |z| \quad \text{für } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Quotientenkriterium.

c) Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}.$$

Für $n = 0$ haben wir

$$\binom{\alpha+\beta}{0} = 1 = \binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{0}.$$

Sei die Aussage bereits für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(n+1)\sum_{k=0}^{n+1}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} &= \sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1}k\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1}k\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Wir beachten nun $k\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{(k-1)!} = \alpha\binom{\alpha-1}{k-1}$, und ebenso $(n+1-k)\binom{\beta}{n+1-k} = \beta\binom{\beta-1}{n-k}$. Eingesetzt in obigen Term erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
(n+1)\sum_{k=0}^{n+1}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} &= \sum_{k=0}^{n}\beta\binom{\alpha}{k}\binom{\beta-1}{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1}\alpha\binom{\alpha-1}{k-1}\binom{\beta}{n+1-k} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \beta\binom{\alpha+\beta-1}{n} + \alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha-1}{k}\binom{\beta}{n-k} \\
&\overset{\text{IV}}{=} (\alpha+\beta)\binom{\alpha+\beta-1}{n}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} = \frac{\alpha+\beta}{n+1}\binom{\alpha+\beta-1}{n} = \binom{\alpha+\beta}{n+1},$$

womit die Induktion abgeschlossen ist.

Wir kommen nun zum Beweis der eigentlichen Aussage. Mit dem Cauchy-Produkt für Reihen (Multiplikation zweier absolut konvergenter Reihen) und der soeben bewiesenen Hilfsaussage erhalten wir

$$\begin{aligned}
B_\alpha(z)\cdot B_\beta(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}z^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}z^k\binom{\beta}{n-k}z^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right)z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}z^n \\
&= B_{\alpha+\beta}(z).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ konvergiert.

b) Man zeige: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{Q})$ ist genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$.

Lösung:

a) Seien $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ und $t_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k}$.

Wir nehmen zunächst an, dass $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ konvergiert. Für $n \leq 2^i$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &\leq x_0 + x_1 + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2^i} + \ldots + x_{2^{i+1}-1}) \\ &\leq x_0 + x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^i x_{2^i} \\ &= x_0 + t_i \\ &\leq x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} < \infty. \end{aligned}$$

Also konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert. Für $n > 2^i$ gilt dann

$$\begin{aligned} \infty > \sum_{k=0}^{\infty} x_k &\geq s_n \\ &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \ldots + (x_{2^{i-1}+1} + \ldots + x_{2^i}) \\ &\geq \frac{1}{2} x_1 + x_2 + 2x_4 + \ldots + 2^{i-1} x_{2^i} \\ &= \frac{1}{2} t_i. \end{aligned}$$

Also konvergiert dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

b) Mit $x_k := \frac{1}{k^\alpha}$ haben wir

$$2^k x_{2^k} = 2^k (2^k)^{-\alpha} = 2^{(1-\alpha)k}.$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{mit } q := 2^{1-\alpha}.$$

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$, also wenn $\alpha > 1$. Mit Teil a) konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ also genau dann, wenn $\alpha > 1$.

Aufgabe 5

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive, monoton fallende Nullfolge, deren Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Summe $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{2n}$.)

b) Es sei $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{nm}$, falls $2^m \leq n < 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, obwohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen Null konvergieren.

Lösung:

a) Da die Reihe konvergiert, existiert nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass für alle $m > l > n_0$ gilt:

$$\sum_{n=l}^{m} a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Speziell für $m = 2l + k$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt daher die Abschätzung

$$\varepsilon > 2 \sum_{n=l}^{2l+k} a_n \geq 2(l+k)a_{2l+k} > 0,$$

wobei die Monotonie von a_n verwendet wurde. Mit $k = 0$ folgt $2la_{2l} < \varepsilon$, und mit $k = 1$ folgt $(2l+1)a_{2l+1} \leq 2(l+1)a_{2l+1} < \varepsilon$, also $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

b) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{nm} > \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{m} \cdot 2^m = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}.$$

Also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 6

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \frac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Lösung:

a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.