Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
19.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Aufgabe 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\overline{M}$ ist abgeschlossen, und es gilt die Implikation

$$A \text{ abgeschlossen, } A \supset M \Rightarrow A \supset \overline{M}.$$

b) ∂M ist abgeschlossen und es gilt $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$.

Aufgabe 3

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie: Ist $K \subset D$ kompakt, so gilt

a) $f(K)$ ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

b) Ist f injektiv, so ist $f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen Ω die Mengen $\overline{\Omega}$, $\operatorname{int}\Omega$ und $\partial\Omega$:

a) $\Omega = [0,1] \times (0,1)$

b) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

c) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{(x,0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig auf $\mathbb{R}$ und es gelte $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums die Stetigkeit der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf Stetigkeit in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$.

c) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist der Abstand von x zur Menge M definiert durch

$$d_M(x) := \inf\{\|x - a\| : a \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $d_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1 ist.