Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
19.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Lösung:

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|e^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e\,, & n \text{ gerade}\,, \\ e^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \le a_n \le n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[n]{|2^n z^{n^2}|} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{|z|^{n^2}} = 2|z|^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^n z^{n^2}| = 2^n \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z + 3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| \le 1$.

Aufgabe 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\overline{M}$ ist abgeschlossen, und es gilt die Implikation

$$A \text{ abgeschlossen, } A \supset M \Rightarrow A \supset \overline{M}.$$

b) ∂M ist abgeschlossen und es gilt $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$.

Lösung:

a) Nach Definition gilt $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M} = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus M)$. Also ist $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ offen und somit $\overline{M}$ abgeschlossen. Ist andererseits $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene Menge mit $A \supset M$, so ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen und $\mathbb{R}^n \setminus A \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, also $\mathbb{R}^n \setminus A \subset \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus M)$ nach Vorlesung und somit $A \supset \overline{M}$. Dies beweist a).

b) Nach Definition gilt $\partial M = \overline{M} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus M})$. Da nach Vorlesung Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, ist also ∂M abgeschlossen. Ferner ist nach Definition $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} M = \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$, folglich $\partial M = \overline{M} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} M) = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$.

Aufgabe 3

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie: Ist $K \subset D$ kompakt, so gilt

a) $f(K)$ ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

b) Ist f injektiv, so ist $f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Lösung:

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $f(K)$. Zu zeigen ist, dass es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die konvergiert und deren Grenzwert in $f(K)$ liegt. Wegen $x_n \in f(K)$ gibt es $a_n \in K$ mit $x_n = f(a_n)$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0 \in K$. Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(a_0) \in f(K).$$

Also ist $f(K)$ kompakt.

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zu zeigen ist, dass $(f^{-1})^{-1}(U)$ offen in $f(K)$ ist. Da $f|K : K \to f(K)$ bijektiv ist, gilt

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U \cap K) = f(K \setminus (K \setminus U)) = f(K) \setminus f(K \setminus U).$$

Da U offen ist, ist $K \setminus U$ abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K, also selbst kompakt. Nach Teil a) ist somit $f(K \setminus U)$ kompakt, also insbesondere eine abgeschlossene Teilmenge von $f(K)$. Also ist $(f^{-1})^{-1}(U) = f(K) \setminus f(K \setminus U)$ offen.

Anmerkung: Eine Teilmenge X von $f(K)$ ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen) in $f(K)$, wenn es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ (bzw. eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^m$) gibt, so dass $X = f(K) \cap V$ (bzw. $X = f(K) \cap A$). Andererseits ist X genau dann offen in $f(K)$, wenn es eine in $f(K)$ abgeschlossene Menge A gibt mit $X = f(K) \setminus A$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen Ω die Mengen $\overline{\Omega}$, $\operatorname{int}\Omega$ und $\partial\Omega$:

a) $\Omega = [0,1] \times (0,1)$

b) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

c) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{(x,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung:

a) $\Omega = [0,1] \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Für jeden Punkt $p = (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$ lässt sich ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $B_\varepsilon(p) \subset (0,1) \times (0,1)$, wobei $B\varepsilon(p)$ der offene Ball um p mit Radius ε ist (wähle z.B. $\varepsilon = \min\{x, y, 1-x, 1-y\}$). Auf der Menge $\{0\} \times (0,1)$ enthält hingegen jeder Ball $B_\varepsilon(0,y)$ mit $y \in (0,1)$ sowohl Punkte (x,y) mit $1 > x > 0$ (d.h. Punkte in Ω), wie auch Punkte mit $x < 0$ (d.h. Punkte außerhalb von Ω). Dieselbe Überlegung gilt für die Mengen $\{1\} \times (0,1)$, $[0,1] \times \{0\}$ und $[0,1] \times \{1\}$. Daher gilt $\operatorname{int}\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\partial\Omega = (\{0,1\} \times (0,1)) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$ und $\overline{\Omega} = \operatorname{int}\Omega \cup \partial\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

b) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Ω ist offen, da $\forall p \in \Omega: \; B_{\|p\|}(p) \subset \Omega$. Offensichtlich gilt $\forall \varepsilon > 0: \; B_\varepsilon(0) \cap \Omega \neq \emptyset$, daher ist 0 ein Randpunkt. Wir haben somit gezeigt, dass $\operatorname{int}\Omega = \Omega$, $\partial\Omega = \{0\}$ und $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^n$.

c) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{(x,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n | x > 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $p = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Falls $x_1 < 0$, so ist $B_{-x_1}(p) \subset \Omega$. Falls $x_1 \geq 0$ und $y := (x_2,\dots,x_n) \neq 0$, so ist $B_{\|y\|}(p) \subset \Omega$. Falls $x_1 \geq 0$ und $(x_2,\dots,x_n) = 0$, so enthält für jedes $\varepsilon > 0$ der Ball $B_\varepsilon(p)$ sowohl Punkte in Ω als auch in der Menge $\{(x,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n | x > 0\} = \Omega^c$. Daher ist $\Omega \setminus \{0\}$ offen und $\{(x,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$ der Rand von Ω. Kürzer gesagt: $\operatorname{int}\Omega = \Omega \setminus \{0\}$, $\partial\Omega = \Omega^c \cup \{0\}$ und $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig auf $\mathbb{R}$ und es gelte $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach Vorlesung liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, d.h. für alle $y, y' \in \mathbb{R}$ mit $y < y'$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $y < q < y'$. Insbesondere gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $q_n \to x$ für $n \to \infty$. Da f und g stetig sind, gilt somit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(x).$$

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ Kriteriums die Stetigkeit der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf Stetigkeit in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$.

c) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist der Abstand von x zur Menge M definiert durch

$$d_M(x) := \inf\{\|x - a\| : a \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $d_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1 ist.

Lösung:

a) Zunächst die Stetigkeit im Punkt $x_0 = 0$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta := \varepsilon^2$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|x - x_0| = x < \delta$: $|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x} < \varepsilon$.

Nun zum Fall $x_0 > 0$: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \sqrt{x_0}\,\varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon.$$

Folglich ist $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig.

b) Die Abbildung g ist in keinem Punkt stetig. Betrachte dazu ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Nach Vorlesung ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, sowie $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

Fall 1: $x_0 \in \mathbb{Q}$
Dann gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - x_0| < \delta$, und folglich gilt $|g(x) - g(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Fall 2: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Dann gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x - x_0| < \delta$, und folglich gilt wieder $|g(x) - g(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Damit ist g an keiner Stelle stetig.

c) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d_M(x) &= \inf\{\|x - a\| : a \in M\} \\ &\leq \inf\{\|x - y\| + \|y - a\| : a \in M\} \\ &= \|x - y\| + \inf\{\|y - a\| : a \in M\} \\ &= \|x - y\| + d_M(y). \end{aligned}$$

Es folgt $d_M(x) - d_M(y) \leq \|x - y\|$. Vertauschen der Rollen von x und y ergibt analog $d_M(y) - d_M(x) \leq \|x - y\|$. Insgesamt folgt

$$|d_M(x) - d_M(y)| \leq \|x - y\|.$$

Also ist d_M Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1.