Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
26.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Grenzprozesse auf Konvergenz bzw. Divergenz und geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x}{|x|}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{a^x-1}{x} \quad (a>0), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

Aufgabe 2

a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases},$

b) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}.$

Aufgabe 4

Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0,2].$$

a) Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

b) Nun sei $y_0 \in [0,2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1} := f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \le 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \le |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.