Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
26.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Grenzprozesse auf Konvergenz bzw. Divergenz und geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x}{|x|}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

Lösung:

i)

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ -1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{|x|} \text{ divergiert für } x \to 0.$$

ii)

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}$$

$$\Rightarrow \quad (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = h\left(n x^{n-1} + h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}.$$

iii) Nach Vorlesung gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $|y| \le (n+1)/2$ die Abschätzung

$$\left| \exp(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k}{k!} \right| \le \frac{2|y|^n}{n!}.$$

Speziell für $n = 2$ erhalten wir für $|y| \le \frac{3}{2}$ die Abschätzung

$$|\exp(y) - 1 - y| \le |y|^2.$$

Nun gilt

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{\exp(x \log a) - 1 - x \log a}{x} + \log a.$$

Mit der Ungleichung von oben (mit $y = x \log a$) erhalten wir für $|x|$ hinreichend klein

$$\frac{|\exp(x\log a) - 1 - x\log a|}{|x|} \leq (\log a)^2 |x| \to 0 \text{ für } |x| \to 0.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

iv)

$$\begin{aligned} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} &= \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

Lösung:

a) Sei $h := g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$, $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$.

b) Setze $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) := \sqrt{x}$. Dann gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$. Nach Teil a) existiert also ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases},$

b) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\, x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}.$

Lösung:

a) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach Vorlesung außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig ist. Nun gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h. f ist auch in der Stelle 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

b) Wegen $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7, -5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7, -5]$. Für $x \in [0, 3]$ ist $(x-3)(x+5) \leq 0$ und $x^3 \geq 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0, 3]$. Für $x \in [-1, 0)$ ist $x^3 \in [-1, 0)$, aber $x^2 + 2x - 15 \leq 1 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1, 0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g, h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 3 vom 2. Übungsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5, -1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen, gilt

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = 4 \neq -16 = f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x).$$

Nach Vorlesung ist dann f in -1 nicht stetig. Entsprechend gilt, da x^3 und $x + 5$ an der Stelle -5 verschieden sind, dass f in -5 nicht stetig ist.

Aufgabe 4

Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0, 2].$$

a) Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

b) Nun sei $y_0 \in [0, 2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1} := f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

Lösung:

a) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f stetig. Zudem ist für $x \geq 0$ offenbar $f(x) \geq 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ gemäß Vorlesung: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f.)

b) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0,2]$ gilt nämlich

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_0 \in [0,2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leq f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}: \ y_{n-1} \leq y_n$. Denn:
IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leq f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leq y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{IV}}{\leq} f(y_n) = y_{n+1}\,.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}: \ y_{n-1} \geq y_n$. Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0,2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt.

Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert nach Vorlesung.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_{n+1} = f(y_n)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n \to \infty} y_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(a)\,,$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a+3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a, die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss $a \geq 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{0.1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)|\le 1$ für alle $x\in[-1,1]$: Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$|f(x)|\overset{(0.1)}{=}\frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\ge 0}}\le|x|\le 1.$$

Wegen $f(0)=0$ ist $|f(x)|\le 1$ für alle $x\in[-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1])\subset[-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1]\subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0\in[-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1)=-1$ und $f(1)=1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0\in[-1,1]$ mit $y_0=f(x_0)\in\{f(x):\ x\in[-1,1]\}=f([-1,1])$. Da $y_0\in[-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1]\subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1])=[-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X,Y Mengen und $f:X\to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y=f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x=g(y)$ zu bringen (wobei $x\in X$, $y\in Y$ und $g:Y\to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} y=f(x) \quad&\iff\quad y=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad\iff\quad 1-xy=\sqrt{1-x^2}\\ &\overset{1-xy\ge 0}{\iff}\quad 1-2xy+x^2y^2=1-x^2 \quad\iff\quad x^2(1+y^2)=2xy\\ &\overset{x\ne 0}{\iff}\quad x(1+y^2)=2y \quad\iff\quad x=\frac{2y}{1+y^2}\,. \end{aligned}$$

Für $x=0$ gilt $y=f(0)=0$, also gilt auch hier $x=\frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1}:\ \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])}\to[-1,1],\ y\mapsto\frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1,x_2\in[-1,1]$ mit $x_1<x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)&=\frac{2x_2}{1+x_2^2}-\frac{2x_1}{1+x_1^2}=\frac{2x_2(1+x_1^2)-2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1+x_1^2x_2-x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\ &=\frac{2(x_2-x_1+x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}>0\,, \end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ ist $x_1 x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es gemäß Vorlesung auch ihre Umkehrfunktion f.

Aufgabe 6

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\,,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Lösung:

a) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Behauptung trivial. Sonst wählen wir ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \neq 0$ und setzen $\epsilon := |f(x_1)|$. Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $M > 0$ mit

$$|f(x)| < \epsilon \qquad \text{für alle } x < -M \text{ und für alle } x > M.$$

Nach Definition von ϵ gilt $x_1 \in [-M, M]$.

Die stetige Funktion $g : [-M, M] \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) := |f(x)|$, nimmt auf der kompakten Menge $[-M, M]$ ihr Maximum an, d.h. es existiert ein $x_0 \in [-M, M]$ mit $g(x) \leq g(x_0)$ für alle $x \in [-M, M]$.

Für jedes $x \in [-M, M]$ gilt somit $|f(x)| = g(x) \leq g(x_0) = |f(x_0)|$. Auch für $x \notin [-M, M]$ ist

$$|f(x)| < \epsilon = |f(x_1)| \overset{x_1 \in [-M,M]}{\leq} |f(x_0)|\,.$$

b) Die stetige Funktion f nimmt auf der kompakten Menge $[a, b]$ ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x) \geq f(x_0) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Demzufolge gilt für jedes $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke von $\frac{1}{f}$ ist z.B. 0.