Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
03.12.2012

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**

**8. Übungsblatt**

## Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_2(x) = \log(\log(x+1)) \quad (x > 0)$$

$$f_3(x) = \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = 2^{\sqrt{x^4+3x^2+7}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

## Aufgabe 2

Sei $a < 0 < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha > 1$, $\delta > 0$ und gilt $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$, so ist $f$ im Punkt 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) Ist $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ und gilt $|f(x)| \geq |x|^\alpha$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$, so ist $f$ im Punkt 0 nicht differenzierbar.

## Aufgabe 3

Die Tangensfunktion ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Zeigen Sie:

a) tan ist im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt Arcus-Tangens.

b) Zeigen Sie, dass der Arcus-Tangens auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $\arctan'(x)$.

**Aufgabe 4**

Zeigen Sie, dass für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{it_1}$, $e^{it_2}$ durch

$$|e^{it_1} - e^{it_2}| = 2 \left| \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \right|$$

gegeben ist. Folgern Sie, dass die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ ein $n$-Eck mit Umfang $L_n = 2n|\sin(\frac{\pi}{n})|$ bilden. Zeigen Sie schließlich

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

**Aufgabe 5**

Berechnen Sie bzw. zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1})$,

b) $x \log x - y \log y \leq (x - y)(1 + \log x) \qquad$ für $x > y > 0$.

**Aufgabe 6**

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\log x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen $e^\pi$, $\pi^e$ die größere ist.