Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
03.12.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_2(x) = \log(\log(x+1)) \quad (x > 0)$$

$$f_3(x) = \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = 2^{\sqrt{x^4+3x^2+7}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lösung:

i)

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \end{aligned}$$

ii)

$$f_2'(x) = \frac{1}{\log(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1}$$

iii)

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \exp\left(\sqrt{x^4+3x^2+7} \cdot \log 2\right) \\ \Rightarrow f_4'(x) &= \frac{4x^3+6x}{2\sqrt{x^4+3x^2+7}} \cdot (\log 2) \cdot \exp\left(\sqrt{x^4+3x^2+7} \cdot \log 2\right) \\ &= 2^{\sqrt{x^4+3x^2+7}} \cdot \frac{2x^3+3x}{\sqrt{x^4+3x^2+7}} \cdot \log 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $a < 0 < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha > 1$, $\delta > 0$ und gilt $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$, so ist f im Punkt 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) Ist $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ und gilt $|f(x)| \geq |x|^\alpha$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$, so ist f im Punkt 0 nicht differenzierbar.

Lösung:

a) Sei $x \neq 0$, $|x| < \delta$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq |x|^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{für } x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Also ist f differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$.

b) Eine analoge Rechnung ergibt

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \geq |x|^{\alpha-1} \to \infty \quad \text{für } x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{existiert nicht!}$$

Also ist f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

Aufgabe 3

Die Tangensfunktion ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Zeigen Sie:

a) tan ist im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt Arcus-Tangens.

b) Zeigen Sie, dass der Arcus-Tangens auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $\arctan'(x)$.

Lösung:

a) In $[0, \frac{\pi}{2})$ ist sin streng monoton wachsend und cos streng monoton fallend. Außerdem sind sin und cos auf $[0, \frac{\pi}{2})$ nichtnegativ. Also ist tan auf $[0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend. Da $\tan(x) = -\tan(-x)$, ist tan damit auch streng monoton wachsend auf ganz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (alternative Argumentation: zeige $\tan' x > 0$). Weiterhin gilt

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty.$$

Unter Verwendung des Zwischenwertsatzes schließen wir, dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

b) Es gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Nach der Regel zur Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion ist somit arctan auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \arctan'(y) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} \\ &= \cos^2(\arctan(y)). \end{aligned}$$

Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Schließlich erhalten wir

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte e^{it_1}, e^{it_2} durch

$$|e^{it_1} - e^{it_2}| = 2 \left| \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \right|$$

gegeben ist. Folgern Sie, dass die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ ein n-Eck mit Umfang $L_n = 2n|\sin(\frac{\pi}{n})|$ bilden. Zeigen Sie schließlich

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} e^{it_1} - e^{it_2} &= 2e^{i\frac{t_1+t_2}{2}} \left(\frac{e^{i\frac{t_1-t_2}{2}} - e^{-i\frac{t_1-t_2}{2}}}{2} \right) \\ &= 2e^{i\frac{t_1+t_2}{2}} i \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$|e^{it_1} - e^{it_2}| = 2 \left| \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \right|.$$

Nach Vorlesung sind die Lösungen von $z^n = 1$ durch $w_k = e^{2\pi\frac{k}{n}i}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gegeben. Es gilt

$$|w_{k+1} - w_k| = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi(k+1)}{n} - \frac{\pi k}{n}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right| = \text{const.}$$

Also bilden die w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ein reguläres n-Eck mit Umfang

$$\begin{aligned} L_n &= |w_1 - w_0| + |w_2 - w_1| + \ldots + |w_0 - w_{n-1}| \\ &= 2n \left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| \\ &= 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi.$$

Für $n \to \infty$ approximieren die von den w_k gebildeten n-Ecke immer besser den Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ und der Umfang der n-Ecke L_n konvergiert gegen den Umfang 2π der $\mathbb{S}^1$.

Skizze für $n = 6$ (hier ausgelassen): Reguläres 6-Eck mit Ecken auf dem Einheitskreis im Winkel von jeweils $0°$, $60°$, $120°$, $180°$ $240°$ und $300°$, gemessen von der positiven reellen Achse im Gegenuhrzeigersinn.

Aufgabe 5

Berechnen Sie bzw. zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1})$,

b) $x \log x - y \log y \leq (x-y)(1 + \log x) \qquad$ für $x > y > 0$.

Lösung:

a) Wir betrachten die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x), \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x \in (x-1,x+1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t \log t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \log t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \log t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x \log x - y \log y = (x-y) f'(\xi) = (x-y)(1 + \log \xi) \leq (x-y)(1 + \log x).$$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\log x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^π, π^e die größere ist.

Lösung:

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{y\cdot\log(x)} > e^{x\cdot\log(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\Longleftrightarrow} \quad y \cdot \log(x) > x \cdot \log(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\log(x)}{x} > \frac{\log(y)}{y} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.