Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
10.12.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{-s}e^{x} \quad (s>0)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{s}e^{-x} \quad (s>0).$

Aufgabe 2

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x):=\begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x>0,\\ 0, & \text{falls } x\le 0.\end{cases}$$

Zeigen Sie: $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie dazu durch Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ die Ableitung $f^{(n)}$ existiert und es Polynome p_n gibt mit

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}, & \text{falls } x>0,\\ 0, & \text{falls } x\le 0.\end{cases}$$

Hinweis: Insbesondere ist damit für jedes $m\in\mathbb{N}$ die Funktion $f^{(m-1)}$ stetig; damit ist auch für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ die Funktion $f^{(n)}$ stetig. Zum Beweis benutzen Sie Aufgabe 1 d).

Aufgabe 3

Man zeige, dass alle Lösungen $f,g\in C^1(\mathbb{R})$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f'(x) &= -g(x) \text{ und}\\ g'(x) &= f(x)\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos x+b\sin x\\ g(x) &= -b\cos x+a\sin x,\end{aligned}$$

wobei $a,b\in\mathbb{R}$ Konstanten sind, gegeben sind.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Funktionen $F(x)=f(x)\cos x+g(x)\sin x$ bzw. $G(x)=f(x)\sin x-g(x)\cos x$ konstant sind.

Aufgabe 4

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}$$

beziehungsweise

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 2 - 2nx, & \text{für } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 5

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $f_k : D \to \mathbb{C}$ Funktionen mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(\sum_{k=1}^{n} f_k)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int 4x \arcsin x \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\displaystyle\int x^n e^x \, dx, \ \ n \in \mathbb{N}_0$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x} - 1} \, dx.$