Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
10.12.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan x + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-s}e^x \quad (s>0)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^s e^{-x} \quad (s>0)$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\tan x + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x + \cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x} =: \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit L'Hospital folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x - \sin x}{\cos x - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{\cos x - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x} \\
&=: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} G(x).$$

Nochmalige Anwendung von L'Hospital liefert

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}{-\sin x - \sin x - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x} \\
&= \frac{0}{-2} = 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan x + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}{\cos x} \\
&=: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit L'Hospital folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{-\sin x} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

c) Es ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall x > 0.$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s$. Für $x > 0$ gilt somit

$$x^{-s}e^x \geq x^{-s}\frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-s}}{n!} \to \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

d) Für $x > 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
1 &= (x^{-s}e^x)(x^s e^{-x}) \\
\Rightarrow x^s e^{-x} &= \frac{1}{x^{-s}e^x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \text{ nach Teil c).} \\
\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^s e^{-x} &= 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann c) und d) auch durch mehrfache Anwendung von L'Hospital beweisen. Dies ist aber viel komplizierter!

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie dazu durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ableitung $f^{(n)}$ existiert und es Polynome p_n gibt mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Hinweis: Insbesondere ist damit für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $f^{(m-1)}$ stetig; damit ist auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $f^{(n)}$ stetig. Zum Beweis benutzen Sie Aufgabe 1 d).

Lösung:

a) Induktionsanfang: $n = 0$

$$f^{(0)}(x) = f(x) \Rightarrow p_n(y) = 1 \; \forall y \in \mathbb{R} \text{ erfüllt die Behauptung.}$$

Induktionsschluss: Sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ schon gezeigt, dass $f^{(n)}$ existiert und

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

mit einem Polynom p_n gilt. Damit gilt für $x < 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = 0.$$

Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \left(-p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} + p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Definiere nun

$$p_{n+1}(s) := s^2 p_n(s) - s^2 p_n'(s).$$

Damit ist p_{n+1} ein Polynom und für $x > 0$ gilt

$$f^{(n+1)}(x) = p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zu zeigen bleibt, dass $f^{(n)}$ in $x = 0$ differenzierbar ist mit $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Für $x < 0$ haben wir

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0.$$

Für $x > 0$ haben wir

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} p_n \left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \to 0 \quad \text{für } x \to 0$$

nach 1 d), da

$$\frac{1}{x} p_n \left(\frac{1}{x}\right) = a_m \frac{1}{x^{m+1}} + a_{m-1} \frac{1}{x^m} + \ldots + a_0 \frac{1}{x},$$

falls $p_m(s) = a_m s^m + \ldots + a_0$ ein beliebiges Polynom vom Grad m ist.

Insgesamt gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 3

Man zeige, dass alle Lösungen $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f'(x) &= -g(x) \text{ und} \\ g'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos x + b \sin x \\ g(x) &= -b \cos x + a \sin x, \end{aligned}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, gegeben sind.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Funktionen $F(x) = f(x) \cos x + g(x) \sin x$ bzw. $G(x) = f(x) \sin x - g(x) \cos x$ konstant sind.

Lösung:

Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ (beliebige) Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

Sei $F(x) = f(x) \cos x + g(x) \sin x$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'(x) &= f'(x) \cos x - f(x) \sin x + g'(x) \sin x + g(x) \cos x \\ &= \cos x \left(f'(x) + g(x)\right) + \sin x \left(g'(x) - f(x)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir $f'(x)+g(x)=0$ und $g'(x)-f(x)=0$ verwendet haben. Also ist

$$F(x) = \text{const.} =: a.$$

Sei weiterhin $G(x) = f(x)\sin x - g(x)\cos x$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G'(x) &= f'(x)\sin x + f(x)\cos x - g'(x)\cos x + g(x)\sin x \\
&= \cos x\,(f(x)-g'(x)) + \sin x\,(f'(x)+g(x)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$G(x) = \text{const.} =: b.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = f(x)\cos x + g(x)\sin x & |\cdot \cos x \\ b = f(x)\sin x - g(x)\cos x & |\cdot \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cos x = f(x)\cos^2 x + g(x)\cos x\sin x \\ b\sin x = f(x)\sin^2 x - g(x)\cos x\sin x \end{cases}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$a\cos x + b\sin x = f(x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = f(x).$$

Dies war die erste zu zeigende Gleichung.

Jetzt nochmal:

$$\begin{cases} a = f(x)\cos x + g(x)\sin x & |\cdot \sin x \\ b = f(x)\sin x - g(x)\cos x & |\cdot (-\cos x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\sin x = f(x)\cos x\sin x + g(x)\sin^2 x \\ -b\cos x = -f(x)\cos x\sin x + g(x)\cos^2 x \end{cases}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$a\sin x - b\cos x = g(x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = g(x).$$

Dies war die zweite zu zeigende Gleichung.

Wir haben also gezeigt: Sind $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ Lösungen des gegebenen Gleichungssystems, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a\cos x + b\sin x$, $g(x) = -b\cos x + a\sin x$.

Umgekehrt lösen für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f(x) = a\cos x + b\sin x$, $g(x) = -b\cos x + a\sin x$ das gegebene Gleichungssystem.

Aufgabe 4

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$$

beziehungsweise

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx, & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ 2-2nx, & \text{für } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösung:

a)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|} = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx} & \text{für } x \ge 0 \\ \frac{nx}{1-nx} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Für } x > 0 \text{ gilt} & f_n(x) \to 1 \text{ für } n \to \infty \\ \text{Für } x < 0 \text{ gilt} & f_n(x) \to -1 \text{ für } n \to \infty \end{array}$$

$\Rightarrow$ (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Da jede der Funktionen f_n stetig ist, die Funktion f in $x = 0$ jedoch nicht stetig ist, kann (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

b) Für alle $x > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < x$

$$\Rightarrow g_n(x) = 0 \text{ für } n \ge N.$$

Also konvergiert (g_n) punktweise gegen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Folge (g_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen g, denn zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ betrachte man

$$\left| g_n\left(\frac{1}{2n}\right) - g\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = |1-0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Aufgabe 5

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ seien $f_k : D \to \mathbb{C}$ Funktionen mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Lösung:

i) $(\sum_{k=1}^n f_k)$ konvergiert punktweise

Sei $x \in D$. Da $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ nach dem Majorantenkriterium absolut. Wir definieren damit für alle $x \in D$

$$f(x) := \sum_{k=1}^\infty f_k(x).$$

ii) Gleichmäßige Konvergenz

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_\infty < \infty$ $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^\infty \|f_k\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

$\Rightarrow \forall n \geq N$ und $\forall x \in D$ gilt:

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \|f_k\|_\infty < \varepsilon$$

$\Rightarrow (\sum_{k=1}^n f_k)$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int 4x \arcsin x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\displaystyle\int x^n e^x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$ d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}-1} \, dx.$

Lösung:

a) Die Substitution $u := \arcsin x$ und anschließende partielle Integration (in der dritten Zeile) liefert:

$$\begin{aligned}
\int 4x \arcsin x \, dx &= \int 4 \sin u \cdot u \cdot \cos u \, du \\
&= \int u \cdot 2 \sin(2u) \, du \\
&= -u \cos(2u) + \int \cos(2u) \, du \\
&= -u \cdot \cos(2u) + \frac{1}{2} \sin(2u) + c \\
&= -u(\cos^2 u - \sin^2 u) + \sin u \cdot \cos u + c \\
&= (2x^2 - 1) \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + c.
\end{aligned}$$

b) Mit Substitution $t = \frac{b}{a}x$ erhalten wir:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\arctan t + c = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}x\right) + c.$$

c) Wir zeigen induktiv

$$\int x^n e^x\,dx = e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^{n+k}x^k + c.$$

Induktionsanfang $n = 0$:

$$\int e^x\,dx = e^x + c = e^x \sum_{k=0}^{0} \frac{0!}{k!}(-1)^{0+k}x^k + c.$$

Sei die Aussage nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ bereits gezeigt.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\int x^{n+1}e^x\,dx &= x^{n+1}e^x - \int (n+1)x^n e^x\,dx \\
&\overset{\text{IV}}{=} x^{n+1}e^x - (n+1)e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^{n+k}x^k + \tilde{c} \\
&= e^x\left(x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!}(-1)^{(n+1)+k}x^k\right) + \tilde{c} \\
&= e^x \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!}(-1)^{(n+1)+k}x^k + \tilde{c}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{c}$ eine beliebige reelle Konstante.

d) Die Substitutionen $t = \sqrt{x}$ und nachher $t = \sin u$ liefern:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}-1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-1}\cdot 2t\,dt = \int \frac{\cos u \cdot 2\sin u \cdot \cos u}{\sin u - 1}\,du \\
&= 2\int \sin u \cdot \frac{1-\sin^2 u}{\sin u - 1}\,du = -2\int (\sin u + \sin^2 u)\,du \\
&= 2\cos u - (u - \sin u \cdot \cos u) + c \\
&= 2\sqrt{1-t^2} - \arcsin t + t\sqrt{1-t^2} + c \\
&= \sqrt{1-x}(2+\sqrt{x}) - \arcsin\sqrt{x} + c.
\end{aligned}$$