Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
17.12.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend oder monoton fallend. Zeigen Sie, dass f über $[a, b]$ R-integrabel ist.

Lösung:
OBdA sei f monoton wachsend (andernfalls argumentiere analog), also

$$\forall a \leq x \leq y \leq b : \ f(a) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(b).$$

Setze

$$c = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max\{|f(a)|, |f(b)|\} < \infty.$$

Für $K \in \mathbb{N}$ unterteile $[a, b]$ in K disjunkte Teilintervalle I_k mit Endpunkten

$$a_k = a + (k-1)\frac{b-a}{K}, \quad b_k = a_k + \frac{b-a}{K} = a_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq K,$$

und Länge

$$|I_k| = \frac{b-a}{K}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Dann sind $e = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{I_k}$, $g = \sum_{k=1}^{K} d_k \chi_{I_k}$ mit

$$c_k = \inf_{I_k} f, \quad d_k = \sup_{I_k} f, \quad 1 \leq k \leq K,$$

Treppenfunktionen mit $e \leq f \leq g$.

Weiter gilt

$$d_k = \sup_{I_k} f \leq f(b_k) = f(a_{k+1}) \leq \inf_{I_{k+1}} f = c_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq K;$$

also

$$
\begin{aligned}
\int_a^b g\, dx - \int_a^b e\, dx &= \sum_{k=1}^{K} (d_k - c_k)|I_k| \\
&= \frac{b-a}{K} \sum_{k=1}^{K} (d_k - c_k) \\
&= \frac{b-a}{K} \left(\underbrace{d_K - c_1}_{\leq 2c} + \sum_{k=1}^{K-1} \underbrace{(d_k - c_{k+1})}_{\leq 0} \right) \\
&\leq 2c \frac{b-a}{K} \to 0 \ \ (K \to \infty).
\end{aligned}
$$

Nach Vorlesung ist eine Funktion f genau dann R-integrabel, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $e, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ existieren mit $e \leq f \leq g$ und

$$
\int_a^b g\, dx - \int_a^b e\, dx < \varepsilon.
$$

Nach obiger Überlegung ist f also R-integrabel.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$
\int_0^{2\pi} \exp(ikx) \cdot \exp(-ilx)\, dx
$$

und

$$
\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(-lx)\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \sin(-lx)\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(-lx)\, dx.
$$

Lösung:

Für $k = l$ gilt

$$
\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx}\, dx = 2\pi.
$$

Für $k \neq l$ gilt

$$
\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx}\, dx = \left[\frac{e^{i(k-l)x}}{i(k-l)} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0.
$$

Aus den Additionstheoremen folgt $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$. Damit erhalten wir für $|k| \neq |l|$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(-lx)\, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos((k+l)x) - \cos((k-l)x)]\, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k+l)x)}{k+l} \right]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k-l)x)}{k-l} \right]_{x=0}^{x=2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Für $k = l \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(-lx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2kx)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

Für $k = -l \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(-lx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2kx)\,dx \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich für $k = l = 0$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(-lx)\,dx = 0.$$

Wegen $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$ ergibt sich analog

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(-lx)\,dx = 0 \qquad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$ ergibt sich schließlich analog

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(-lx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } |k| \neq |l|, \\ \pi & \text{für } |k| = |l| \neq 0, \\ 2\pi & \text{für } k = l = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie

i)

$$\int \frac{dx}{1-x^4}$$

ii)

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1}\,dx$$

Lösung:

i) Es gilt

$$1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2).$$

Wir zerlegen wie folgt:

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c+dx}{1+x^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $1 - x$, ergibt sich

$$a = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-x^4} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{4}.$$

Analog berechnet man

$$b = \lim_{x \to -1} \frac{1+x}{1-x^4} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{1}{4}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} c + dx &= \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \right) (1+x^2) \\ &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

das heißt,

$$c = \frac{1}{2}, \qquad d = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^4}\, dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1-x}\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+x}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= -\frac{1}{4} \log(1-x) + \frac{1}{4} \log(1+x) + \frac{1}{2} \arctan(x) + c \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan(x) + c. \end{aligned}$$

ii) Polynomdivision liefert

$$x^3 - 2x + 1 = x(x^2+1) - 3x + 1.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2+1}\, dx &= \int x\, dx - \int \frac{3x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \log(1+x^2) + \arctan(x) + c. \end{aligned}$$

Dabei berechnet sich das Integral $\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx$ mit der Substitution $y = x^2$.

Aufgabe 4

Ist die Funktion $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

R-integrabel?

Lösung:
Die Funktion $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist *nicht* R-integrabel. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen, gilt für jedes Intervall $I \subset [0,1]$ mit $|I| > 0$

$$I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset, \quad I \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

und daher

$$0 = \inf_I f < \sup_I f = 1.$$

Für Treppenfunktionen $e, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $e = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{I_k} \leq f \leq g = \sum_{l=1}^{L} d_l \chi_{J_l}$ folgt

$$\int_0^1 e\,dx = \sum_{k=1}^{K} c_k |I_k| \leq 0, \qquad \int_0^1 g\,dx = \sum_{l=1}^{L} d_l |J_l| \geq 1;$$

also

$$\underline{\int_0^1} f\,dx \leq 0 < 1 \leq \overline{\int_0^1} f\,dx.$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

a)
$$\int x^k e^{-x}\,dx = -\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} x^l e^{-x} + c \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei c eine Konstante ist.

b)
$$\Gamma(k+1) := \lim_{y\to\infty} \int_0^y x^k e^{-x}\,dx = k! \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Lösung:

a) Wir zeigen die Formel mittels Induktion über k. Für $k = 0$ haben wir

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c = -\sum_{l=0}^{0} \frac{0!}{l!} x^l e^{-x} + c.$$

Sei die Formel für ein $k \in \mathbb{N}_0$ bereits gezeigt. Dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int x^{k+1} e^{-x}\,dx &= -x^{k+1}e^{-x} + \int (k+1) x^k e^{-x}\,dx \\
&\overset{\text{IV}}{=} -x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\left(-\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} x^l e^{-x}\right) + \tilde{c} \\
&= -x^{k+1}e^{-x} - \sum_{l=0}^{k} \frac{(k+1)!}{l!} x^l e^{-x} + \tilde{c} \\
&= -\sum_{l=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{l!} x^l e^{-x} + \tilde{c},
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{c}$ eine beliebige reelle Konstante ist.

b) Mit Teil a) gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(k+1) &= \lim_{y\to\infty}\int_0^y x^k e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(-\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!}y^l e^{-y}+\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!}0^l e^{-0}\right)\\ &= -\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!}\left(\lim_{y\to\infty}y^l e^{-y}\right)+k!\\ &= k!,\end{aligned}$$

wobei $\lim_{y\to\infty} y^l e^{-y}=0$ verwendet wurde nach Aufgabe 1 d), Übungsblatt 9.

Aufgabe 6

Es seien $n,m\in\mathbb{N}_0$. Man berechne

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^m\,dx.$$

Lösung:
Wir setzen $I_{n,m} := \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$. Mittels partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}I_{n,m} &= \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx\\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(1-x)^m\right]_0^1}_{=0}-\int_0^1\frac{1}{n+1}x^{n+1}m(1-x)^{m-1}(-1)\,dx\\ &= \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx\\ &= \frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$I_{n+m,0}=\int_0^1 x^{n+m}\,dx=\left[\frac{1}{n+m+1}x^{n+m+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+m+1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = I_{n,m} &= \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}I_{n+m,0}\\ &= \frac{n!\,m!}{(n+m)!}I_{n+m,0}\\ &= \frac{n!\,m!}{(n+m)!}\cdot\frac{1}{n+m+1}\\ &= \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}.\end{aligned}$$

Für das zweite Integral benutzen wir die Substitution $x = 2t - 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1+x)^n (1-x)^m \, dx &= \int_0^1 (2t)^n (2-2t)^m \cdot 2 \, dt \\
&= 2^{n+m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt \\
&= 2^{n+m+1} I_{n,m} \\
&= 2^{n+m+1} \frac{n! \, m!}{(n+m+1)!}.
\end{aligned}$$