Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
07.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a)
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

b)
$$\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)(\log\log k)^s}, \quad \text{wobei } s \in \mathbb{R}$$

b)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$

c)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ im Punkt 0.

b) Für Konstanten $m_0 \geq 0$ und $c \geq 1$ definieren wir $E : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $\eta : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$ und

$$E(v) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \eta(v) v^2.$$

Aufgabe 4

a) Sei $f(x) := \log(1+x)$. Zeigen Sie:

$$0 \leq \log(1+x) - T_0^4 f(x) \leq \frac{1}{5}x^5 \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b, und c, für die gilt:

$$|\log(2+x) - a - bx| \leq cx^2 \quad \text{für alle } x \in [-1,1].$$

c) Approximieren Sie die Funktion $g(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_{\frac{1}{2}}^2 g$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\left| g(x) - T_{\frac{1}{2}}^2 g(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3 .$$

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen U sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume V?

a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\}$, $V = \mathbb{R}^3$

b) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$

c) $U = \{(a+b, b^2) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^2$

d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\}$, $V = \mathbb{R}^3$

Aufgabe 6

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der Menge aller reeller Folgen, bzw. der Menge aller Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$?

a) $\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$

b) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$

c) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$

d) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist surjektiv}\}$