Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
07.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a)
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

b)
$$\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Lösung:

Vorbemerkung: Gilt $\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty$, so folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)\, dx$. Dies folgt aus der Definition des uneigentlichen Integrals und wird im Folgenden verwendet.

a) Die Taylorentwicklung von $f(x) := \sin x$ liefert

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r_0^4 f(x),$$

wobei $r_0^4 f(x) = f(x) - T_0^4 f(x)$ mit $|r_0^4 f(x)| \le x^5$ für $x \ge 0$ (Resttermabschätzung der Taylorreihe). Ähnlich erhalten wir $x \sin x = x^2 + r(x)$ mit $|r(x)| \le x^4$ für $0 \le x \le 1$. Somit existiert ein $A \in (0,1)$, so dass

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - \sin x}{x \sin x}\right| &= \left|\frac{x^3/3! - r_0^4 f(x)}{x^2 + r(x)}\right| \\ &\le 2\frac{x}{3!} + \left|\frac{x^5}{x^2 + r(x)}\right| \\ &\le 2\frac{x}{3!} + 2x^3 \\ &\le x\end{aligned}$$

für alle $x \in (0, A)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx\right| &\le \int_0^A \left|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right| dx + \int_A^1 \left|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right| dx \\ &\le \int_0^A x\, dx + \int_A^1 \left|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right| dx < \infty,\end{aligned}$$

d.h. das Integral konvergiert.

b) Das Integral konvergiert, denn

$$\left| \int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{\pi}} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx \leq \int_0^{\frac{1}{\pi}} 1 \, dx = \frac{1}{\pi}.$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)(\log\log k)^s}, \qquad \text{wobei } s \in \mathbb{R}$$

b)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$

c)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}$$

Lösung:

a)

Fall 1: $s \leq 0$

Für $t \geq e^e$ gilt $t(\log t)(\log\log t)^s \leq t \log t$, also

$$(t(\log t)(\log\log t)^s)^{-1} \geq (t \log t)^{-1}.$$

Ferner erhalten wir mit der Substitution $s = \log t$

$$\begin{aligned} \int_{e^e}^{\infty} (t \log t)^{-1} \, dt &= \lim_{y\to\infty} \int_{e^e}^{y} (t \log t)^{-1} \, dt \\ &= \lim_{y\to\infty} \int_{e}^{\log y} \frac{1}{s} \, ds \\ &= \lim_{y\to\infty} [\log s]_e^{\log y} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Da $(t \log t)^{-1}$ monton fällt, folgt aus dem Integralvergleichskriterium, dass die Reihe $\sum_{k=3}^{\infty}(k \log k)^{-1}$ divergiert. Aus dem Minorantenkriterium folgt, dass auch die ursprüngliche Reihe divergiert.

Fall 2: $s > 0$

Für $t \geq e$ fällt die Funktion $t \mapsto 1/(t(\log t)(\log\log t)^s)$ monoton, und wir können die Konvergenz der Reihe mit dem Integralkriterium prüfen: Mit der Substitution $x = \log\log t$, $dx = dt/(t \log t)$ erhalten wir

$$\int_3^{\infty} \frac{dt}{t(\log t)(\log\log t)^s} = \int_{\log\log 3}^{\infty} \frac{dx}{x^s}.$$

Also konvergiert die Reihe genau dann, wenn $s > 1$.

b) Die Funktion $t \mapsto (\log t)^{-\log t}$ ist für $t \geq e$ monoton fallend. Substitution $x = \log t$, $dt = e^x dx$ liefert

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \frac{dt}{(\log t)^{\log t}} &= \int_{\log 3}^\infty \frac{e^x}{x^x} dx \\ &= \int_{\log 3}^\infty e^{x - x\log x} dx. \end{aligned}$$

Für den Exponenten $f(x) := x(1 - \log x)$ des Exponenten gilt $f'(x) = -\log x$. Insbesondere gilt $\forall x > e : \; f'(x) < -1$, und weiterhin $f(e^2) = -e^2$. Für $x > e^2$ gilt also $f(x) = f(e^2) + \int_{e^2}^x f'(y)\, dy < -e^2 + \int_{e^2}^x (-1)\, dy = -x$ und damit $e^{x - x\log x} < e^{-x}$. Wir erhalten

$$\int_{\log 3}^\infty e^{x - x\log x}\, dx \leq \int_{\log 3}^{e^2} e^{x - x\log x}\, dx + \int_{e^2}^\infty e^{-x}\, dx < \infty,$$

und die Reihe konvergiert.

c) Wir berechnen für $t > 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left((\log t)^2 t^{-\log\log t}\right) &= 2(\log t)\frac{1}{t} t^{-\log\log t} + (\log t)^2 \left(t^{-\log\log t}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\log\log t\right)\right) \\ &= -t^{-1-\log\log t}(\log t)((\log t)(1 + \log\log t) - 2). \end{aligned}$$

Es gibt also ein $c \in [0, \infty)$, so dass für $t \geq c$ die Funktion $t \mapsto (\log t)^2 t^{-\log\log t}$ monoton fällt. Substituiere $x = \log t$, $dt = e^x dx$:

$$\int_c^\infty \frac{(\log t)^2\, dt}{t^{\log\log t}} = \int_{\log c}^\infty x^2 e^{x - x\log x}\, dx.$$

Da für $x > e^2$ gilt $e^{x - x\log x} < e^{-x}$ (siehe Teil b)), und da $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n! < \infty$ (siehe 10. Übungsblatt, Aufgabe 5 b)), konvergiert das Integral und somit die Reihe.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ im Punkt 0.

b) Für Konstanten $m_0 \geq 0$ und $c \geq 1$ definieren wir $E : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ durch

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $\eta : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$ und

$$E(v) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \eta(v) v^2.$$

Lösung:

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$

$$\Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{3}{4}, \qquad f(0) = 1$$
$$\Rightarrow \quad (T_0^2 f)(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2.$$

b) Es gilt $E(v) = m_0 c^2 f(\frac{v^2}{c^2})$, wobei f wie in Teil a).

Lemma aus Vorlesung $\Rightarrow \exists$ Funktion $\tilde{\eta} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\eta}(x) \to 0$ für $x \to 0$ und

$$\begin{aligned} f(x) &= (T_0^1 f)(x) + \tilde{\eta}(x)x \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \tilde{\eta}(x)x. \end{aligned}$$

Setze $x = \frac{v^2}{c^2}$.

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\tilde{\eta}(\frac{v^2}{c^2})}{c^2}v^2$$
$$\Rightarrow \quad E(v) = m_0 c^2 f\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + m_0 \tilde{\eta}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) v^2.$$

Definiere $\eta : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch $\eta(v) := m_0 \tilde{\eta}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$. Für $v \to 0$ gilt $\frac{v^2}{c^2} \to 0$ und damit

$$\lim_{v\to 0} \eta(v) = \lim_{v \to 0} m_0 \tilde{\eta}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = 0$$

und

$$E(v) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \eta(v) v^2.$$

Aufgabe 4

a) Sei $f(x) := \log(1+x)$. Zeigen Sie:

$$0 \le \log(1+x) - T_0^4 f(x) \le \frac{1}{5}x^5 \qquad \text{für alle } x \ge 0.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b, und c, für die gilt:

$$|\log(2+x) - a - bx| \le cx^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1].$$

c) Approximieren Sie die Funktion $g(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T^2_{\frac{1}{2}}g$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\left| g(x) - T^2_{\frac{1}{2}} g(x) \right| \le C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3.$$

Lösung:

a) Die durch $f(x) := \log(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_0^4 f$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_0^4 f(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geq 0$. Um die Abschätzung $0 \leq \log(1+x) - T_0^4 f(x) \leq \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_0^4 f(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_0^4 f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leq \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geq 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leq \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

b) Für die durch $f(x) := \log(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \log 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$|f(x) - \log 2 - \frac{x}{2}| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \leq \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \log 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

c) Die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$g'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad g''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad g'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$g(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad g'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad g''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2 \cdot \tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T^2_{\frac{1}{2}}g$ lautet

$$\begin{aligned} T^2_{\frac{1}{2}}g(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = g(\tfrac{1}{2}) + g'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}g''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$g(x) = T^2_{\frac{1}{2}}g(x) + \frac{g^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\left|g(x) - T^2_{\frac{1}{2}}g(x)\right| = \frac{|g'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geq 0$ ergibt sich

$$\frac{|g'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Big(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen U sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume V?

a) $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\}$, $V = \mathbb{R}^3$

b) $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$

c) $U = \{(a+b, b^2) \in \mathbb{R}^2 : a,b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^2$

d) $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\}$, $V = \mathbb{R}^3$

Lösung:

a)
- $(0,0,0) \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$
- $v = (v_1,v_2,v_3) \in U$, $w = (w_1,w_2,w_3) \in U \Rightarrow v_1 = v_2 = 2v_3$, $w_1 = w_2 = 2w_3$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow v + w &= (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3) \\ &= (v_1+w_1, v_1+w_1, \frac{1}{2}(v_1+w_1)) \in U \end{aligned}$$

- $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) = (\lambda v_1, \lambda v_1, \frac{1}{2}\lambda v_1) \in U$

  Also ist U ein Untervektorraum.

b) $U = \{(0,0)\} \Rightarrow U$ ist Untervektorraum

c) Es gilt $b^2 > 0$ für alle $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wähle $\lambda = -1$

$$\Rightarrow \lambda(a+b, b^2) = (-a-b, -b^2) \notin U \text{ für } b \neq 0$$

$\Rightarrow U$ ist kein Untervektorraum

d) Sei $v = (2,1,1) \in U$, $\lambda = -1$
$\Rightarrow \lambda v = (-2,-1,-1) \notin U \Rightarrow U$ ist kein Untervektorraum

Aufgabe 6

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der Menge aller reeller Folgen, bzw. der Menge aller Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$?

a) $\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$

b) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$

c) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$

d) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist surjektiv}\}$

Lösung:

a) Wir zeigen, dass $A := \left\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\right\}$ ein Untervektorraum der Menge aller reellen Folgen ist:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots) \in A$. (ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$, d.h. die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|$ konvergieren. Damit konvergieren dann auch die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha|x_j|$ und $\sum_{j=1}^{\infty}(|x_j|+|y_j|)$. Wegen $|\alpha x_j| = |\alpha||x_j|$ und $|x_j+y_j| \leq |x_j|+|y_j|$ für alle $j \in \mathbb{N}$ konvergieren nach dem Majorantenkriterium auch die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|$. Folglich sind auch $\alpha(x_j),\ (x_j) + (y_j) \in A$.

b) Wir zeigen, dass $B := \left\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(0) = 0\right\}$ ein Untervektorraum der Menge aller Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0\,,$ also $f + g \in B\,;$

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0\,,$ also $\alpha f \in B\,.$

c) $C := \left\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\right\}$ ist kein Untervektorraum der Menge aller Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in [-1,1]$, jedoch nicht.

d) $D := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist surjektiv} \right\}$ ist kein Untervektorraum der Menge aller Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)