Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
14.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume von V, so dass $W_1 \cup W_2 \subset V$ auch ein Untervektorraum von V ist. Zeigen Sie, dass dies $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$ impliziert.

Aufgabe 2

Sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktionen f_1, f_2 und f_3, wobei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$ und $f_3(x) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V wie in Aufgabe 2. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$). Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$, $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Zeigen Sie:

i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 5

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_5)$.

b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ aus, und kombinieren Sie jeweils $v_1, \ldots, v_5$ daraus linear.

Aufgabe 6

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

c) $\operatorname{span}(x^2,\ x^2 + x,\ x^2 + 1,\ x^2 + x + 1,\ x^7 + x^5) \subset \mathbb{R}[X]$