Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
14.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume von V, so dass $W_1 \cup W_2 \subset V$ auch ein Untervektorraum von V ist. Zeigen Sie, dass dies $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$ impliziert.

Lösung:
Angenommen es gilt nicht $W_1 \subset W_2$. Zu zeigen ist dann $W_2 \subset W_1$. Sei $w_2 \in W_2$ beliebig und $w_1 \in W_1 \setminus W_2 \Rightarrow w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$.

$W_1 \cup W_2$ Untervektorraum $\Rightarrow w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$.

Angenommen es gilt $w_1 + w_2 \in W_2$. Dann gilt $w_1 = (w_1 + w_2) - w_2 \in W_2$, ein Widerspruch. Es folgt $w_1 + w_2 \in W_1$, also $w_2 = (w_1 + w_2) - w_1 \in W_1$, also $W_2 \subset W_1$.

Aufgabe 2

Sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktionen f_1, f_2 und f_3, wobei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$ und $f_3(x) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Lösung:
Es gelte

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0.$$

Dies impliziert $\lambda_1 + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Indem wir der Reihe nach $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \pi$ einsetzen, erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0, \\ \lambda_1 \qquad + \lambda_3 & = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0. \end{cases}$$

Dies liefert $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Also sind f_1, f_2, f_3 linear unabhängig.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V wie in Aufgabe 2. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$). Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$, $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Lösung:
Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über n.

$n = 1$: Sei $\lambda_1 e^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $e^{\beta_1 x} > 0$, folgt $\lambda_1 = 0$.

Sei die Aussage für $n - 1$ bereits gezeigt. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 e^{\beta_1 x} + \ldots + \lambda_n e^{\beta_n x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\beta_n x}$ und erhalten

$$\lambda_1 e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \ldots + \lambda_{n-1} e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} + \lambda_n = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung und erhalten

$$\lambda_1 (\beta_1 - \beta_n) e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \ldots + \lambda_{n-1} (\beta_{n-1} - \beta_n) e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da $\beta_1 - \beta_n, \ldots, \beta_{n-1} - \beta_n$ auch paarweise verschieden sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\lambda_1 (\beta_1 - \beta_n) = \ldots = \lambda_{n-1} (\beta_{n-1} - \beta_n) = 0.$$

Da $\beta_i \neq \beta_n$ für $1 \leq i \leq n - 1$, folgt $(\beta_i - \beta_n) \neq 0$ für $1 \leq i \leq n - 1$ und damit

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Aus $(*)$ folgt $\lambda_n e^{\beta_n x} = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_n = 0$. Also sind $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig.

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Zeigen Sie:

i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Lösung:

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Wäre $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 a & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -a\lambda_3 \\ \lambda_2 &= -\lambda_3 \\ \lambda_1 &= -2\lambda_3 \end{cases}$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 5

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_5)$.

b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ aus, und kombinieren Sie jeweils $v_1, \ldots, v_5$ daraus linear.

Lösung:

a) Mit der Methode aus Aufgabe 4 a) i) prüft man, dass $\{v_1, v_2, v_4\}$ linear unabhängig ist: Aus den Vektoren v_1, v_2, v_4 erstellen wir die zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vertauscht man die erste mit der dritten Zeile, erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Von der dritten Zeile subtrahieren wir $4\cdot$ die erste Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Zur dritten Zeile addieren wir $3\cdot$ die zweite Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilenstufenform zeigt, dass sich keine Nullzeile produzieren lässt, also keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar ist. Damit ist $\{v_1, v_2, v_4\}$ linear unabhängig.

Ferner gilt offensichtlich $v_5 = -2v_2$, sowie $v_3 = v_1 + 2v_2$ Es folgt $\dim V = 3$ und $\{v_1, v_2, v_4\}$ ist eine Basis von V.

b) Jede Basis hat genau 3 Elemente. Da $\{v_1, v_2, v_4\}$ eine Basis ist und $v_3 = v_1 + v_2$, $v_5 = -2v_2$, muss v_4 in der Basis enthalten sein (v_4 lässt sich nicht aus den anderen Vektoren linear kombinieren).

Aus $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ sind also noch genau zwei Vektoren in der Basis enthalten, wobei wegen $v_5 = -2v_2$ nur maximal einer der Vektoren v_2, v_5 in der Basis enthalten ist.

Es kommen also nur folgende Mengen als Basen in Betracht: $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$.

Wir stellen im Folgenden jeden der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ als Linearkombination aus Vektoren der einzelnen Mengen dar; dies zeigt, dass jede der gerade genannten Mengen tatsächlich eine Basis ist.

Darstellung der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ als Linearkombination aus $\{v_1, v_3, v_4\}$:

$$v_1 = 1 \cdot v_1, \quad v_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3, \quad v_3 = 1 \cdot v_3, \quad v_4 = 1 \cdot v_4, \quad v_5 = v_1 - v_3.$$

Darstellung der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ als Linearkombination aus $\{v_1, v_2, v_4\}$:

$$v_1 = 1 \cdot v_1, \quad v_2 = 1 \cdot v_2, \quad v_3 = v_1 + 2v_2, \quad v_4 = 1 \cdot v_4, \quad v_5 = -2v_2.$$

Darstellung der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ als Linearkombination aus $\{v_2, v_3, v_4\}$:

$$v_1 = -2v_2 + v_3, \quad v_2 = 1 \cdot v_2, \quad v_3 = 1 \cdot v_3, \quad v_4 = 1 \cdot v_4, \quad v_5 = -2v_2.$$

Darstellung der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ als Linearkombination aus $\{v_1, v_4, v_5\}$:

$$v_1 = 1 \cdot v_1, \quad v_2 = -\frac{1}{2}v_5, \quad v_3 = v_1 - v_5, \quad v_4 = 1 \cdot v_4, \quad v_5 = 1 \cdot v_5.$$

Darstellung der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ als Linearkombination aus $\{v_3, v_4, v_5\}$:

$$v_1 = v_3 + v_5, \quad v_2 = -\frac{1}{2}v_5, \quad v_3 = 1 \cdot v_3, \quad v_4 = 1 \cdot v_4, \quad v_5 = 1 \cdot v_5.$$

Aufgabe 6

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = x_3\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

c) $\mathrm{span}(x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5) \subset \mathbb{R}[X]$

Lösung:

a) Eine Basis ist gegeben durch $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, denn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ folgt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = (0, 0, 0,)$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; ist ferner $v \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = (a, b, a)$, also $v = av_1 + bv_2$.

b) Die beiden Gleichungen $x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtrahiert man 2$\cdot$ die erste Zeile von der zweiten, führt dies auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert $x_2 = \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4$, $x_1 = -3x_2 - 2x_4$. Die Variablen x_3, x_4 sind frei wählbar und der gegebene Vektorraum ist damit 2-dimensional.

Setzt man bspw. $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, so erhält man $x_2 = 1$, $x_1 = -3$. Setzt man $x_3 = 0$, $x_4 = 5$, so erhält man $x_2 = -4$, $x_1 = 2$. Die Vektoren $(-3, 1, 5, 0)$ und $(2, -4, 0, 5)$ sind offensichtlich linear unabhängig und bilden zusammen eine Basis.

c) Wir zeigen zunächst, dass $\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig ist: Es gelte

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + x) + \lambda_3(x^2 + 1) + \lambda_4(x^7 + x^5) = 0,$$

also

$$\lambda_3 + \lambda_2 x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + \lambda_4 x^5 + \lambda_4 x^7 = 0.$$

Da die Polynome $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \subset \mathbb{R}[X]$ linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_3 = 0, \quad , \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Damit ist $\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig. Schließlich lässt sich das Polynom $x^2 + x + 1$ als Linearkombination aus den restlichen Polynomen darstellen, und zwar gilt

$$-x^2 + (x^2 + x) + (x^2 + 1) = x^2 + x + 1.$$

Damit ist $\mathrm{span}(x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5)$ ein 4-dimensionaler Vektorraum und

$$\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$$

ist eine Basis dieses Vektorraums.

Alternativ: Offensichtlich ist dann auch

$$\{1,\, x,\, x^2, x^7 + x^5\}$$

eine Basis (die Vektoren sind linear unabhängig und jeder Vektor lässt sich als Linearkombination der Vektoren der ersten Basis schreiben).