Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
21.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Stellen Sie fest, ob das System $A_k\,x = b$ für ein $b \in \mathbb{R}^3$ eine *eindeutige* Lösung besitzt $(k = 1, 2, 3)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei M der Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen. Weiter sei für eine Matrix $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ die transponierte Matrix A^t definiert durch $A^t = (a_{ji})$. Die Abbildung $P : M \to M$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a_{1n} & \dots & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P ist eine lineare Abbildung.

b) $\mathrm{Kern}(P) = \{A \in M : \ A^t = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) $\mathrm{Bild}(P) = \{A \in M : \ A = A^t\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) $\dim(\mathrm{Bild}(P)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathrm{Kern}(P)) = \frac{n(n-1)}{2}$

Aufgabe 4

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie Kern ϕ und Bild ϕ.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$. Berechnen Sie eine Basis von Kern A und von Bild A.

Aufgabe 5

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ und eine Basis von Bild ϕ.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Aufgabe 6

Seien $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit $v \neq w$ und sei L die Gerade durch v und w. Zeigen Sie:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$