Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
21.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 1 \end{cases}$$

Lösung:
Aus

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 1 \end{cases}$$

erhalten wir

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ x_3 - 7x_4 = -7 \\ 2x_3 - 14\,x_4 = -14 \end{cases}$$

und damit

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ x_3 - 7x_4 = -7 \end{cases}$$

und schließlich

$$\begin{cases} x_1 = -9 - x_2 + 10x_4 \\ x_3 = -7 + 7x_4 \end{cases}$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\{(-9 - s + 10\,t, s, -7 + 7t, t) : \ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 2

Stellen Sie fest, ob das System $A_k\,x = b$ für ein $b \in \mathbb{R}^3$ eine *eindeutige* Lösung besitzt $(k = 1, 2, 3)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- Die Vektoren $(1, 2, 0)$ und $(1, 1, 1)$ sind linear unabhängig. Ferner sind die ersten beiden Zeilen identisch, insbesondere linear abhängig. Damit ist der Zeilenrang von $A_1 = 2$. Es folgt $\dim \mathrm{Kern}(A_1) = 1 \Rightarrow$ Die Gleichung ist nicht eindeutig lösbar.
- Analog (wie bei A_1) ist der Zeilenrang von $A_2 = 2$ und damit die Gleichung nicht eindeutig lösbar.
- Die drei Zeilen sind linear unabhängig. Also ist der Zeilenrang von $A_3 = 3$. Es folgt $\dim \mathrm{Kern}(A_3) = 0 \Rightarrow$ Die Gleichung ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 3

Sei M der Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen. Weiter sei für eine Matrix $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ die transponierte Matrix A^t definiert durch $A^t = (a_{ji})$. Die Abbildung $P : M \to M$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a_{1n} & \dots & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P ist eine lineare Abbildung.

b) $\mathrm{Kern}(P) = \{A \in M : \ A^t = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) $\mathrm{Bild}(P) = \{A \in M : \ A = A^t\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) $\dim(\mathrm{Bild}(P)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathrm{Kern}(P)) = \frac{n(n-1)}{2}$

Lösung:

a) Es gilt

$$P(\lambda A) = \frac{1}{2}(\lambda A + (\lambda A)^t) = \frac{1}{2}(\lambda A + \lambda A^t) = \lambda \cdot \frac{1}{2}(A + A^t) = \lambda P(A),$$

sowie

$$\begin{aligned} P(A + B) &= \frac{1}{2}((A + B) + (A + B)^t) = \frac{1}{2}(A + B + A^t + B^t) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(B + B^t) = P(A) + P(B). \end{aligned}$$

Also ist P eine lineare Abbildung.

b) $A \in \mathrm{Kern}(P) \ \Leftrightarrow \ A + A^t = 0 \ \Leftrightarrow \ A^t = -A$.

c) i) Sei $B \in M \Rightarrow P(B)^t = \frac{1}{2}(B + B^t)^t = \frac{1}{2}(B^t + B) = P(B)$. Also gilt $\mathrm{Bild}(P) \subset \{A \in M : \ A = A^t\}$.

ii) Sei $C \in M$ mit $C^t = C$. Dann gilt $\frac{1}{2}(C + C^t) = \frac{1}{2}(2C) = C$, also $P(C) = C$. Es folgt $\{A \in M : \quad A = A^t\} \subset \text{Bild}(P)$.

Insgesamt folgt aus i) und ii): $\text{Bild}(P) = \{A \in M : \quad A = A^t\}$.

d) Eine Basis von $\text{Bild}(P)$ wird durch die folgenden Matrizen gebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 1 & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Diese Matrizen sind offenbar linear unabhängig, außerdem läßt sich jede symmetrische Matrix als Linearkombination dieser Matrizen schreiben. Also bilden obige Matrizen eine Basis. Da man in der rechten oberen Dreiecksmatrix stets ein Element $= 1$ wählen kann und den Rest $= 0$, besteht diese Basis aus

$$n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Elementen, also $\dim \text{Bild}(P) = \frac{n(n+1)}{2}$. Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \text{Kern}(P) &= \dim M - \dim \text{Bild}(P) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie Kern ϕ und Bild ϕ.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$. Berechnen Sie eine Basis von Kern A und von Bild A.

Lösung:

a) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ist ϕ linear. Es gilt

$$\text{Kern } \phi = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ Ax = 0\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Gemäß Definition ist

$$\text{Bild } \phi = \{\phi(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^2\} = \{Ax \ : \ x \in \mathbb{R}^2\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

weil Bild A der lineare Aufspann der Spalten von A ist.

b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -\frac{1}{3} Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{3} Z_1 \\ Z_3 \to -\frac{1}{2} Z_3 + \frac{1}{3} Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{2} Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{span}\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Die Dimensionsformel liefert dim Bild $A = 3 - \text{dim Kern } A = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\text{Bild } A = \text{span}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 5

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n k x_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ und eine Basis von Bild ϕ.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Lösung:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n k x_k$ eine Abbildung.

a) Aufgrund von

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n}$$

ist $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}) = \sum_{k=1}^{n} k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k x_k + \sum_{k=1}^{n} k y_k = \alpha\phi(x) + \phi(y)\,.$$

b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt Bild $\phi = \mathbb{R}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von Bild $A =$ Bild ϕ. Insbesondere ist dim Bild $A = 1$.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren Kern $\phi =$ Kern A aufspannen. Die Dimensionsformel liefert $n =$ dim Bild $A+$dim Kern A, folglich ist dim Kern $A = n-1$. Wir bestimmen Kern $A =$ Kern ϕ: Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist in Kern ϕ enthalten. Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Kern ϕ:

$$\text{Kern } \phi = \text{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\}\,.$$

c) Wegen ϕ injektiv $\iff$ Kern $\phi = \{0\}$ $\iff$ dim Kern $\phi = 0$ ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

Aufgabe 6

Seien $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit $v \neq w$ und sei L die Gerade durch v und w. Zeigen Sie:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$

Lösung:
Es gilt

$$x = (x_1, x_2) \in L \; \Leftrightarrow \; \exists \lambda \in \mathbb{R} : x_i = v_i + \lambda(w_i - v_i), \quad i = 1, 2.$$

Also ist

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x_i = v_i + \lambda(w_i - v_i), \; i = 1, 2\}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 0 & w_1 - v_1 & w_2 - v_2 \\ 0 & x_1 - v_1 & x_2 - v_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} w_1 - v_1 & w_2 - v_2 \\ x_1 - v_1 & x_2 - v_2 \end{pmatrix} \\ &\overset{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(w_i - v_i) = x_i - v_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$