Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
28.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt (letztes Blatt)

Aufgabe 1

Ist $\det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ eine Determinantenfunktion, so gilt nach Vorlesung

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma,$$

insbesondere ist die Determinante (falls existent) *eindeutig* bestimmt. Weisen Sie nun nach, dass obige Formel alle Eigenschaften einer Determinantenfunktion erfüllt. Dies zeigt die *Existenz* der Determinante.

Aufgabe 2

a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Hat $A^2 + A$ den Eigenwert -1, so hat A^3 den Eigenwert 1.

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und seien $v_1, \dots, v_r$ orthonormale Vektoren, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq r$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

i) $v_1, \dots, v_r$ ist eine Basis von V.

ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$, dass $v = 0$ ist.

iii) Ist $v \in V$, so gilt: $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle v_i$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgende Matrix auf Diagonalisierbarkeit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\begin{cases} (\alpha - 2) \cdot x + (\alpha - 1) \cdot y - (\alpha - 1) \cdot z = 0 \\ (6 - 3\alpha) \cdot x + (\alpha^2 - 1) \cdot y + (\alpha - 1) \cdot z = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot x + \alpha(\alpha - 1) \cdot y - \alpha(\alpha - 1) \cdot z = \alpha - 1. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Finden Sie für diejenigen α, für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.

Aufgabe 6 (*Achtung:* Diese Aufgabe benötigt den Vorlesungsstoff der Woche ab 04.02.)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix P an, so dass $P^t AP$ Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.