Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
28.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt (letztes Blatt)

Aufgabe 1

Ist $\det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ eine Determinantenfunktion, so gilt nach Vorlesung

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma,$$

insbesondere ist die Determinante (falls existent) *eindeutig* bestimmt. Weisen Sie nun nach, dass obige Formel alle Eigenschaften einer Determinantenfunktion erfüllt. Dies zeigt die *Existenz* der Determinante.

Lösung:

1.) Nach Vorlesung ist

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sign} \sigma.$$

Sei nun $b = \begin{pmatrix} b_1^j \\ \vdots \\ b_n^j \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\det(a^1, \dots, a^{j-1}, \lambda a^j + \mu b^j, a^{j+1}, \dots, a^n) \\
= &\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(j-1),j-1} (\lambda a_{\sigma(j),j} + \mu b^j_{\sigma(j)}) a_{\sigma(j+1),j+1} \dots a_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sign} \sigma \\
= &\lambda \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sign} \sigma + \mu \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(j-1),j-1} b^j_{\sigma(j)} a_{\sigma(j+1),j+1} \dots a_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sign} \sigma \\
= &\lambda \cdot \det(a^1, \dots, a^n) + \mu \cdot \det(a^1, \dots, a^{j-1}, b^j, a^{j+1}, \dots, a^n).
\end{aligned}$$

2.) Seien $1 \leq i < j \leq n$. Sei $\tau \in S_n$ die Transposition, die i und j vertauscht. Es gilt

$$S_n = \{\tau \circ \sigma : \sigma \in S_n\}. \qquad (*)$$

Sei $\tilde{a}^j := a^{\tau(j)}$, bzw. $\tilde{a}_{i,j} := a_{i,\tau(j)}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\det(a^1, \dots, a^i, \dots, a^j, \dots, a^n) &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \tilde{a}_{1,\tau\circ\sigma(1)} \dots \tilde{a}_{n,\tau\circ\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \tilde{a}_{1,\tau\circ\sigma(1)} \dots \tilde{a}_{n,\tau\circ\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) \\
&\overset{(*)}{=} -\sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \tilde{a}_{1,\tilde{\sigma}(1)} \dots \tilde{a}_{n,\tilde{\sigma}(n)} \cdot \operatorname{sign} \tilde{\sigma} \\
&= -\det(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^n) \\
&= -\det(a^1, \dots, a^{i-1}, a^j, a^{i+1}, \dots, a^{j-1}, a^i, a^{j+1}, \dots, a^n).
\end{aligned}$$

3.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma \\
&= \sum_{\sigma = \mathrm{Id}} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Hat $A^2 + A$ den Eigenwert -1, so hat A^3 den Eigenwert 1.

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Ist -1 Eigenwert von $A^2 + A$, so existiert ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit

$$(A^2 + A)(v) = A^2(v) + A(v) = -v.$$

Daraus folgt $A^2(v) + A(v) + v = 0$. Wendet man auf diese Gleichung erneut A an, so erhält man

$$0 = A(A^2(v) + A(v) + v) = A^3(v) + A^2(v) + A(v) = A^3(v) - v,$$

also $A^3(v) = v$. Damit hat A^3 den Eigenwert 1 mit Eigenvektor v.

b) Für das charakteristische Polynom gilt

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathbb{E}_3) &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also -1, 2 und 4.

Bestimmung der Eigenvektoren:

zum Eigenwert -1:

$$B + \mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist jedes Element aus $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1.

zum Eigenwert 2:

$$B - 2\mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist jedes Element aus $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

zum Eigenwert 4:

$$B - 4\mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist jedes Element aus $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und seien $v_1, \ldots, v_r$ orthonormale Vektoren, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq r$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

i) $v_1, \ldots, v_r$ ist eine Basis von V.

ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$, dass $v = 0$ ist.

iii) Ist $v \in V$, so gilt: $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle v_i$.

Lösung:

i) $\Rightarrow$ iii): Sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von V. Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$. Aus der Orthonormalität folgt $\langle v, v_i \rangle = \lambda_i$, also $v = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle v_i$.

iii) $\Rightarrow$ ii): trivial

ii) $\Rightarrow$ i): Wir ergänzen $\{v_1, \ldots, v_r\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ von V. Für jedes $j = 1, \ldots, s$ gilt dann $\langle w_j, v_i \rangle = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$, und aus ii) folgt $w_j = 0$, also $s = 0$ und $V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgende Matrix auf Diagonalisierbarkeit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Für das charakteristische Polynom gilt

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Also sind 1 und -1 die beiden einzigen Eigenwerte von A.

Bestimmung von Eigenvektoren zum Eigenwert 1:

$$A - \mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Ergänzt man diese beiden Vektoren durch einen Eigenvektor zum Eigenwert -1, so erhält man ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$. Also ist A diagonalisierbar.

Aufgabe 5

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\left\{ \begin{array}{rl} (\alpha - 2) \cdot x + \quad (\alpha - 1) \cdot y - \quad (\alpha - 1) \cdot z = & 0 \\ (6 - 3\alpha) \cdot x + (\alpha^2 - 1) \cdot y + \quad (\alpha - 1) \cdot z = & 0 \\ (\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot x + \alpha(\alpha - 1) \cdot y - \alpha(\alpha - 1) \cdot z = & \alpha - 1. \end{array} \right.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Finden Sie für diejenigen α, für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\det(A_\alpha) &= \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & (\alpha+1)(\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \\
&= -(\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} -2 & \alpha+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2).
\end{aligned}$$

Beim dritten Gleichheitszeichen wurde zur ersten und zur zweiten Spalte jeweils die dritte Spalte addiert.

Die Matrix A_α ist also invertierbar für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

b) Cramersche Regel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, $A = (a_1, \ldots, a_n)$, so sind die Komponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (mit $b \in \mathbb{K}^n$) gegeben durch

$$x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det A} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Um die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems zu berechnen, benötigen wir also die folgenden Determinanten:

$$\begin{aligned}
D_1 &:= \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 0 & (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-1) \det \begin{pmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-1)^3(\alpha+2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &:= \det \begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & 0 & \alpha-1 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&= -(\alpha-1) \det \begin{pmatrix} \alpha-2 & -(\alpha-1) \\ -3(\alpha-2) & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= 2(\alpha-1)^2(\alpha-2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &:= \det\begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) & 0 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-1)\det\begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4).
\end{aligned}$$

Für die Komponenten des Lösungsvektors folgt also

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{D_1}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \\
x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\alpha)} = \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2} \\
x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix P an, so dass P^tAP Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{E}_4)$:

$$\det(A-\lambda\mathbb{E}_4) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}}{=} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{S_2\to S_2+S_4}{=} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{nach } Z_4}}{=} (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{S_2\to S_2-S_3}{=} (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{nach } Z_3}}{=} (4-\lambda)^2\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\left((3-\lambda)(1-\lambda)-3\right) = (4-\lambda)^2\left(\lambda^2-4\lambda\right) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix besitzt also die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 3.

Als nächstes bestimmen wir die Eigenräume. Zu berechnen ist $\mathrm{Kern}(A - \lambda_i \mathbb{E}_4),\ i = 1, 2$. Wir formen die Matrix $A - \lambda_1 \mathbb{E}_4$ mit Hilfe von Zeilenumformungen um:

$$A - 0 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_2]{\substack{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_3}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{Z_i \to Z_i/4 \\ i=3,4}]{Z_1 \to (Z_1 + 2Z_3)/4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_4 \to Z_4 - Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - Z_1}]{Z_2 \to Z_2 - 3Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir den Eigenraum ablesen. Es gilt: $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\{c_1\}$ wobei $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Um den Eigenraum zum Eigenwert 4 zu bestimmen, gehen wir genauso vor:

$$A - 4\mathbb{E}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten als Eigenraum $\mathrm{span}\{c_2, c_3, c_4\}$ mit $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da die Vektoren c_1, c_2, c_3, c_4 linear unabhängig sind, ist $C := (c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$ eine reguläre Matrix mit $C^{-1}AC = D$ und $D \in \mathbb{R}^{4,4}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Werten $0, 4, 4, 4$ auf der Diagonalen. Um eine orthogonale Matrix P mit $P^T AP = D$ zu finden, müssen wir ein Orthonormalsystem p_1, p_2, p_3, p_4 aus Eigenvektoren von A gewinnen. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, können wir die beiden Eigenräume unabhängig voneinander behandeln. Im Eigenraum zum Eigenwert 0 ist ein Orthonormalsystem gegeben durch $p_1 := \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{2} c_1$.
Nun zum Eigenraum zum Eigenwert 4: Wir stellen zunächst fest, dass die Vektoren $c_2, c_3 + c_4$ und c_4 auch eine Basis des Eigenraums bilden und dass die Vektoren c_2 und $c_3 + c_4$ orthogonal zueinander sind. Wir verwenden das Verfahren von Gram-Schmidt, um aus diesen drei

Vektoren eine Orthonormalbasis zu gewinnen:

$$p_2 := \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{c_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad p_3 := \frac{c_3+c_4}{\|c_3+c_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_4 := c_4 - \langle c_4, p_2\rangle p_2 - \langle c_4, p_3\rangle p_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$p_4 := \frac{v_4}{\|v_4\|} = v_4$$

Nach Konstruktion bilden p_2, p_3, p_4 eine Orthonormalbasis vom Eigenraum zum Eigenwert 4 und eine Matrix P mit $P^T AP = D$ ist gegeben durch

$$P = (p_1\ p_2\ p_3\ p_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 0 & 1\\ -1 & \sqrt{2} & 0 & -1\\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1\\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}.$$

b) Aus $P^T AP = D$ folgt unmittelbar $A = PDP^T = PDP^{-1}$ und folglich

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, folgt

$$D^k = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4^k&0&0\\0&0&4^k&0\\0&0&0&4^k\end{pmatrix} = 4^{k-1}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix} = 4^{k-1}D$$

also $A^k = 4^{k-1}PDP^{-1} = 4^{k-1}A$.