Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
24.10.2013

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1:**
Negieren Sie folgende Aussagen:

(a) „Alle Deutschen sind groß und trinken Bier.“

(b) „Ich gehe immer ins Kino, wenn Batman oder James Bond gezeigt werden.“

(c) „Es gibt einen Bundesligaverein, der in allen Spielen höchstens drei Tore geschossen und mindestens einen Spieler ausgewechselt hat.“

**Aufgabe 2:**
Vereinfachen Sie durch logische Umformungen folgende Aussagen:

(a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$

(b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee (\neg C \vee \neg B) \wedge B]$

**Aufgabe 3:**

(a) Für beliebige Teilmengen $M_1, M_2, M_3$ einer Grundmenge $X$ zeige man:

$$(M_1 \cap M_2 \subseteq M_3^c \wedge M_1 \cup M_3 \subseteq M_2) \Rightarrow M_1 \cap M_3 = \emptyset$$

Hinweis: Für eine Teilmenge $M$ der Grundmenge $X$ wird mit

$$M^c = \{x \in X | x \notin M\}$$

das *Komplement* von $M$ in $X$ bezeichnet.

(b) Seien $X, Y$ Mengen sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Das *Bild* einer Teilmenge $A$ von $X$ wird durch

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A : f(x) = y\}$$

definiert. Das *Urbild* einer Teilmenge $B$ von $Y$ wird durch

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

definiert. Zeigen Sie für beliebige $M_1, M_2 \subseteq Y$ und $M_3, M_4 \subseteq X$:

(i) $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$

(ii) $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$

(iii) $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$

Zeigen Sie durch Gegenbeispiel, dass in (ii) keine Gleichheit gelten muss.

— **Bitte wenden!** —

## Aufgabe 4:

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen $\sim$ in der jeweiligen Menge $X$ Äquivalenzrelationen sind:

(i) $X = \mathbb{N}$, $\quad m \sim n \Leftrightarrow m$ ist durch $n$ teilbar, d.h. $\exists k \in \mathbb{N} : m = nk$

(ii) $X = \mathbb{R}$, $\quad x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2\pi k$

(iii) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\quad (z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$

(b) Untersuchen Sie, ob in der Menge $X = \mathbb{R}^2$ die Relation $\prec$ mit

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$$

eine Ordnungsrelation ist.

## Aufgabe 5:

Es seien $X, Y$ und $Z$ Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Deren Komposition werde mit $h = g \circ f$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie:

(i) Sind $f$ und $g$ injektiv, so ist auch $h$ injektiv.

(ii) Sind $f$ und $g$ surjektiv, so ist auch $h$ surjektiv.

(iii) Sind $f$ und $g$ bijektiv, so ist auch $h$ bijektiv.

(iv) Ist $h$ surjektiv, so ist auch $g$ surjektiv.

(v) Ist $h$ surjektiv und $g$ injektiv, so ist $f$ surjektiv.

(b) Widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch je ein Gegenbeispiel:

(i) Ist $h$ injektiv, so ist auch $g$ injektiv.

(ii) Ist $h$ surjektiv, so ist auch $f$ surjektiv.

(iii) Ist $h$ nicht injektiv, so gilt: $f$ ist nicht injektiv und $g$ ist nicht injektiv.

(iv) Ist $h$ nicht surjektiv, so gilt: $f$ ist nicht surjektiv und $g$ ist nicht surjektiv.

## Aufgabe 6:

Seien $a$, $b$, $c$ und $d$ reelle Zahlen, wobei $c$ und $d$ nicht gleichzeitig 0 sind. Durch die Zuordnungsvorschrift

$$x \mapsto f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

wird eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ definiert.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ von $f$.

(b) Überprüfen Sie, unter welcher Voraussetzung an die Parameter $a$ bis $d$ die Funktion $f$ die Menge $D_f$ *injektiv* abbildet. Wie lauten dann Definitionsbereich und Zuordnungsvorschrift der Umkehrabbildung $f^{-1}$?

(c) Für welche Parameter ist $f \circ f = \mathrm{id}_{D_f}$?