Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
08.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die Fallunterscheidung:

(i) $x \geq 5$: Es gilt dann $|x-5| = x-5$ und damit:

$$|x-5| \leq 2 \Leftrightarrow x-5 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 7$$

(ii) $x < 5$: Es gilt dann $|x-5| = 5-x$ und damit:

$$|x-5| \leq 2 \Leftrightarrow 5-x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x$$

Insgesamt ist also das Intervall $M = [5,7] \cup [3,5) = [3,7]$ die Lösungsmenge.

(b) Sei wieder $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3}-x\right|$. Es bietet sich nochmals eine Fallunterscheidung an:

(i) $x \geq \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3}-x\right| = x-\frac{4}{3}$ und damit:

$$|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3}-x\right| > 2x+10 \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{4}{3}\right) > 2x+10 \Leftrightarrow x > 14$$

(ii) $x < \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3}-x\right| = \frac{4}{3}-x$ und damit:

$$|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3}-x\right| > 2x+10 \Leftrightarrow 3\left(\frac{4}{3}-x\right) > 2x+10 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} > x$$

Insgesamt ist also die Lösungsmenge $M = (-\infty, -\frac{6}{5}) \cup (14, \infty)$.

(c) Da Beträge nicht-negativ sind, gilt:

$$\begin{aligned} |x+2| > |x-3| \quad &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 > (x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+4x+4 > x^2-6x+9 \\ &\Leftrightarrow \quad 10x > 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit ist $M = (\frac{1}{2}, \infty)$ die Lösungsmenge.

□

Aufgabe 8:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt: $|2x-10| = 2\,|x-5|$. Betrachte die Fallunterscheidung:

(i) $x \geq 5$: Es gilt dann $|x-5| = x-5$ und damit:

$$|2x-10| = 2\,|x-5| = 2(x-5) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 10$$

(ii) $x < 5$: Es gilt dann $|x-5| = 5-x$ und damit:

$$|2x-10| = 2\,|x-5| = 2(5-x) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{3} \leq x$$

Insgesamt ist also das Intervall $M = [\frac{10}{3}, 5) \cup [5, 10] = [\frac{10}{3}, 10]$ die Lösungsmenge.

(b) Sei wieder $x \in \mathbb{R}$. Es bietet sich wieder eine Fallunterscheidung an:

(i) $x \geq -1 \wedge |x+1| \geq 2\,(\Leftrightarrow x \geq 1)$: Es gilt dann $|x+1| = x+1$ und $||x+1|-2| = |x+1|-2 = x-1$. Insgesamt folgt:

$$||x+1|-2| = x-1 \leq x \Leftrightarrow -1 \leq 0 \Leftrightarrow \text{wahr}$$

(ii) $x \geq -1 \wedge |x+1| < 2\,(\Leftrightarrow -1 \leq x < 1)$: Es gilt dann $|x+1| = x+1$ und $||x+1|-2| = 2-|x+1| = 1-x$. Insgesamt folgt:

$$||x+1|-2| = 1-x \leq x \Leftrightarrow 1 \leq 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x$$

(iii) $x < -1 \wedge |x+1| \geq 2\,(\Leftrightarrow x \leq -3)$: Es gilt dann $|x+1| = -x-1$ und $||x+1|-2| = |x+1|-2 = -x-3$. Insgesamt folgt:

$$||x+1|-2| = -x-3 \leq x \Leftrightarrow -3 \leq 2x \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x$$

Wegen $-3 < -\frac{3}{2}$, ist diese Aussage nicht erfüllt.

(iv) $x < -1 \wedge |x+1| < 2\,(\Leftrightarrow -3 < x < -1)$: Es gilt dann $|x+1| = -x-1$ und $||x+1|-2| = 2-|x+1| = 2-(-x-1)$. Insgesamt folgt:

$$||x+1|-2| = 3+x \leq x \Leftrightarrow 3 \leq 0 \Leftrightarrow \text{falsch}$$

Die Lösungsmenge ist demnach $M = [1, \infty) \cup [\frac{1}{2}, 1) = [\frac{1}{2}, \infty]$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\left|x^2-4\right| = |x-2|\,|x+2|$. Für $x = -2$ ist die Ungleichung erfüllt. Sei also im Weiteren $x \neq -2$. Es gilt:

$$\left|x^2-4\right| \leq x+2 \Leftrightarrow |x-2|\,|x+2| \leq x+2 \Leftrightarrow |x-2| \leq \frac{x+2}{|x+2|} \in \{-1, 1\}$$

Da Beträge nicht-negativ sind, muss die rechte Seite der letzten Ungleichung nicht-negativ sein, d.h. $x+2 \geq 0$ bzw. äquivalent $x \geq -2$. Wegen $x \neq -2$ dürfen wir im Weiteren sogar die Ungleichung

$$|x-2| \leq 1$$

für $x > -2$ betrachten. Wie in vorherigen Aufgabenteilen, bietet sich eine Fallunterscheidung an:

(i) $x \geq 2$: Es gilt dann $|x-2| = x-2$ und damit:

$$|x-2| = x-2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 3$$

(ii) $x < 2$: Es gilt dann $|x-2| = 2-x$ und damit:

$$|x-2| = 2-x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x$$

Damit ist die Lösungsmenge $M = \{-2\} \cup [2,3] \cup [1,2) = \{-2\} \cup [1,3]$.

$\square$

Aufgabe 9:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 15 = 10x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $M = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|x-2| \cdot |x+2| = \left|x^2 - 4\right|$ und damit $|x-2| \cdot |x+2| = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \in \{-2, 2\}$. Ferner gilt

$$x^2 - 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right\}$$

sowie

$$x^2 - 4 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

Damit ist die Lösungsmenge $M = \left\{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\right\}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |2 - |2-x|| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad (2 - |2-x|)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - 4\,|2-x| + |2-x|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad |2-x|^2 = 4\,|2-x| \end{aligned}$$

Offenbar ist $x = 2$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir können also für weitere Rechnungen $x \neq 2$ annehmen. Es gilt dann:

$$|2 - |2-x|| = 2 \Leftrightarrow |2-x| = 4$$

Eine Fallunterscheidung liefert:

(i) $x > 2$: Dann gilt $|2-x| = x-2$ und somit

$$|2-x| = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

(ii) $x < 2$: Dann gilt $|2-x| = 2-x$ und somit

$$|2-x| = 4 \Leftrightarrow 2 - x = 4 \Leftrightarrow x = -2.$$

Damit lautet die Lösungsmenge $M = \{-2, 2, 6\}$

$\square$

Aufgabe 10:
Betrachte die Funktion f aus dem Hinweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ mit $a \leq b$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(b) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} \\ &\Leftrightarrow \quad a(1+b) \leq b(1+a) \\ &\Leftrightarrow \quad a + ab \leq b + ba \\ &\Leftrightarrow \quad a \leq b \end{aligned}$$

Also ist f monoton wachsend. Wegen der Dreiecksungleichung gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$. Damit folgt:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = f(|x+y|) \leq f(|x|+|y|) = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$$

Da $0 < 1 + |x| \leq 1 + |x| + |y|$ bzw. $0 < 1 + |y| \leq 1 + |x| + |y|$ gilt, folgt schließlich:

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

□