Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
07.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(iv) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) Beweisen Sie die letzte Gleichung ohne Verwendung der vollständigen Induktion.

Aufgabe 12:

Bezeichne $A(n)$ die Aussage: „Wenn von n Katzen eine grau ist, sind sie alle grau." Finden Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis dieser Aussage:

- *Induktionsanfang (IA):*
  $A(1)$ ist offensichtlich richtig.
- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $A(n)$ (*Induktionsvoraussetzung* (IV)).
  Seien $n+1$ Katzen $K_1, \ldots, K_{n+1}$ gegeben, wobei O.B.d.A. K_1 grau ist. Dann gilt für die Katzen $K_1, \ldots, K_n$ nach der IV, dass sie alle grau sind. Ebenso folgt, dass die Katzen $K_1, \ldots, K_{n-1}, K_{n+1}$ (n Stück) grau sind. Somit sind alle $n+1$ Katzen grau.

□

Aufgabe 13:

Betrachten Sie die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

und finden Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis:

- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n-1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{2} + (n-1) \Leftrightarrow (n-1)n = \frac{n(n^2-1)}{2} + (n-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1)n = \frac{n(n^2-1)}{2} + (n-1) \Leftrightarrow n^2 - n = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n - 1$$

$$\overset{n=1}{\Leftrightarrow} \quad 1^2 - 1 = \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{2}1 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow \text{wahr}$$

— **Bitte wenden!** —

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*:
  $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$
  Dann gilt für $n+1$:
  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(2+n)(n+1)}{2} + 1$$
  Somit gilt die Formel für $n+1$.

Aufgabe 14:
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1+\mathrm{i}| = |z-3-3\mathrm{i}|\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-\mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z-1-2\mathrm{i}| < 3\}$

(c) $C = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) > 1\right\}$

(d) $D = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z^2) \leq 1\right\}$

Aufgabe 15:
Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - \mathrm{i}$ und $w = -1 + 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von:

(a) z^3

(b) $\frac{1}{z}$

(c) $z \cdot w$

(d) $\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}$

Hinweis: Der zu berechnende Betrag in der Teilaufgabe (d) ist keine „schöne“ Zahl.

Aufgabe 16:
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

(a) $z^2 - 2z + 3 = 0$

(b) $z^2 = |z|^2$

(c) $z^3 + 8 = 0$

(d) $z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = 0$

Hinweis: Die Gleichung in der Teilaufgabe (d) besitzt eine Lösung z mit $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.