Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
15.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 11:

(i)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 = (n+1)! - 1$.
- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 \end{aligned}$$

□

(ii)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \\
&= -\frac{1}{2n+2} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} -\frac{1}{2n+2} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k+1} \\
&= -\frac{1}{2n+2} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k+1}
\end{aligned}$$

□

(iii)
- *Induktionsanfang (IA):*

  Für $n=2$ gilt $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{n^n}{n!}$.

- *Induktionsschluss (IS):*

  Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{n^n}{n!}$$

Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

(iv)
- *Induktionsanfang (IA):*

  Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{6(n+1) + n(2n+1)}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{6n + 6 + 2n^2 + n}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

□

Die letzte Gleichung lässt sich wie folgt direkt beweisen: Man betrachte die Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = n^3$$

und berechne die linke Seite weiter zu

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k - (k-1))(k^2 + k(k-1) + (k-1)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + k^2 - k + k^2 - 2k + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n.
\end{aligned}$$

Einsetzen der linken Seite in die erste Gleichung und Auflösen nach $\sum_{k=1}^{n} k^2$ liefert die gesuchte Formel:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3 \Leftrightarrow 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

□

Aufgabe 12:

Der Fehler liegt im Induktionsschluss und zwar im Fall $n = 1$: Es liegen dann die Katzen K_1, K_2 vor, von der K_1 grau ist. Ihre Aufteilung in zwei Mengen, wie sie im Induktionsschluss beschrieben ist, lautet dann $M_1 = \{K_1, \ldots, K_n\} = \{K_1\}$, $M_2 = \{K_1, \ldots, K_{n-1}, K_{n+1}\} = \{K_2\}$. Also enthält M_2 nicht notwendigerweise eine graue Katze. Die Induktionsvoraussetzung kann nicht angewandt werden.

Aufgabe 13:

Der Fehler liegt im Induktionsanfang und zwar bereits in der ersten Äquivalenz

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n-1}{n-1}.$$

Für $n = 1$ ist nämlich $n - 1 = 0$, also ist der Term $\frac{n-1}{n-1}$ nicht erklärt (Division durch 0). Man bemerke, dass der Induktionsschluss, obwohl die zu beweisende Aussage falsch ist, korrekt durchgeführt werden kann.

Aufgabe 14:

(a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z \in A \quad &\Leftrightarrow \quad |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}| \\
&\Leftrightarrow \quad |(x+1) + \mathrm{i}(y+1)|^2 = |(x-3) + \mathrm{i}(y-3)|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2y + 2 = -6x - 6y + 18 \\
&\Leftrightarrow \quad 8y = -8x + 16 \Leftrightarrow y = 2 - x,
\end{aligned}$$

d.h. $A = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = 2 - \operatorname{Re}(z)\}$. Also ist A eine Gerade in der komplexen Zahlenebene. Siehe auch Abbildung (1).

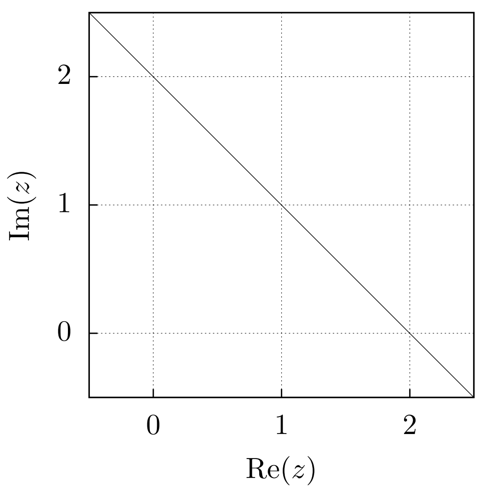

Abbildung 1: Menge A

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} B &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| < 1\}^c = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| < 1\} \end{aligned}$$

Also ist B die offene Kugel um $1 + 2\mathrm{i}$ mit Radius 3 ohne die offene Kugel um i mit Radius 1. Siehe auch Abbildung (2).

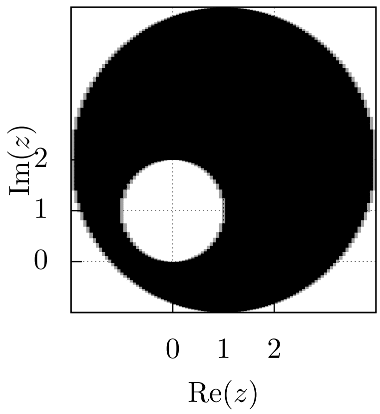

Abbildung 2: Menge B

(c) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} z \in C &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}((x + \mathrm{i}y)^2) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{1 + y^2} \vee x < -\sqrt{1 + y^2} \end{aligned}$$

Also gilt $C = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < -\sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2}\right\}$. Siehe auch Abbildung (3).

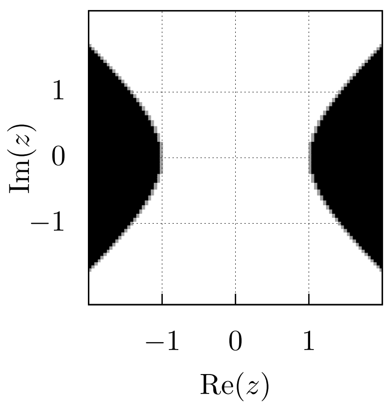

Abbildung 3: Menge C

(d) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$z \in D \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2) \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}((x+\mathrm{i}y)^2) \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) \leq 1 \Leftrightarrow 2xy \leq 1$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

- $x = 0$: In diesem Fall gilt nach Obigem $z = x + \mathrm{i}y \in D$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.
- $x > 0$: In diesem Fall gilt nach Obigem $z = x + \mathrm{i}y \in D \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2x}$.
- $x < 0$: In diesem Fall gilt nach Obigem $z = x + \mathrm{i}y \in D \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2x}$.

Also gilt:

$$D = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = 0\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{2\operatorname{Re}(z)} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq \frac{1}{2\operatorname{Re}(z)} \right\}$$

Siehe auch Abbildung (4).

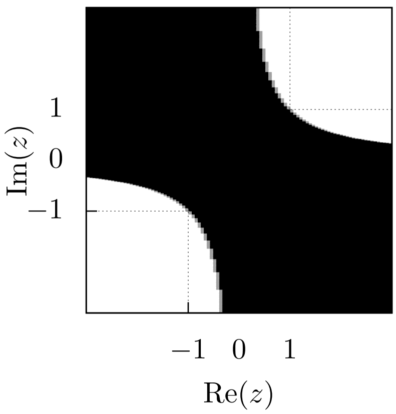

Abbildung 4: Menge D

Aufgabe 15:
Wir berechnen vorbereitend:

$$|z| = |3 - \mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + 1^1} = \sqrt{10}, \qquad |w| = |-1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

(a) Es gilt

$$z^3 = (3 - \mathrm{i})^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2\mathrm{i} + 3 \cdot 3(\mathrm{i})^2 - (\mathrm{i})^3 = 18 - 26\mathrm{i}$$

und damit $\operatorname{Re}(z^3) = 18$, $\operatorname{Im}(z^3) = -26$, $\left|z^3\right| = |z|^3 = 10\sqrt{10}$.

(b) Es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{10}(3 + \mathrm{i})$$

und damit $\operatorname{Re}(z^{-1}) = \frac{3}{10}$, $\operatorname{Im}(z^{-1}) = \frac{1}{10}$, $\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

(c) Es gilt

$$z \cdot w = (3 - \mathrm{i}) \cdot (-1 + 2\mathrm{i}) = -3 - 2(\mathrm{i})^2 + \mathrm{i}(1 + 6) = -1 + 7\mathrm{i}$$

und damit $\operatorname{Re}(z \cdot w) = -1$, $\operatorname{Im}(z \cdot w) = 7$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 5\sqrt{2}$.

(d) Es gilt

$$\overline{z}^2+\frac{1}{w^2} = (3+\mathrm{i})^2+\frac{\overline{w}^2}{|w|^4} = 3^2+6\mathrm{i}-1+\frac{(-1-2\mathrm{i})^2}{25} = 8+6\mathrm{i}+\frac{1}{25}(1+4\mathrm{i}-4) = 8-\frac{3}{25}+\left(6+\frac{4}{25}\right)\mathrm{i}$$

und damit $\mathrm{Re}(\overline{z}^2+\frac{1}{w^2}) = 8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$, $\mathrm{Im}(\overline{z}^2+\frac{1}{w^2}) = 6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$ sowie $\left|\overline{z}^2+\frac{1}{w^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{197}{25}\right)^2+\left(\frac{154}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{38809+23716} = \frac{\sqrt{2501}}{5}$.

Aufgabe 16:

Sei $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
z^2-2z+3=0 &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^2-2(x+\mathrm{i}y)+3=0\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+3+\mathrm{i}(2xy-2y)=0\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+3=0 \wedge y(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+3=0 \wedge (y=0 \vee x=1)
\end{aligned}$$

Wir betrachten die einzelnen Fälle:

- $y = 0$: Es ergibt sich

$$x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=-2$$

  für $x \in \mathbb{R}$. Die letzte Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, also gibt es keine Lösungen $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $y = 0$.

- $x = 1$: Es ergibt sich

$$y^2-2=0 \Leftrightarrow |y|=2 \Leftrightarrow y=\sqrt{2} \vee y=-\sqrt{2}$$

  für $y \in \mathbb{R}$.

Insgesamt gibt es also genau zwei Lösungen $z_0 = 1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ und $z_1 = 1-\mathrm{i}\sqrt{2}$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
z^2=|z|^2 &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^2=x^2+y^2\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2+2\mathrm{i}xy=x^2+y^2\\
&\Leftrightarrow 2y^2=0 \wedge 2xy=0\\
&\Leftrightarrow y^2=0 \wedge (x=0 \vee y=0)\\
&\Leftrightarrow y=0 \wedge (x=0 \vee y=0)\\
&\Leftrightarrow (y=0 \wedge x=0) \vee y=0\\
&\Leftrightarrow y=0
\end{aligned}$$

Damit ist $M = \{w \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(w) = 0\} \simeq \mathbb{R}$ die gesuchte Lösungsmenge.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
z^3+8=0 &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^3+8=0\\
&\Leftrightarrow x^3+3\mathrm{i}x^2y-3xy^2-\mathrm{i}y^3+8=0\\
&\Leftrightarrow x^3-3xy^2+8=0 \wedge 3x^2y-y^3=0\\
&\Leftrightarrow x^3-3xy^2+8=0 \wedge y(3x^2-y^2)=0\\
&\Leftrightarrow x^3-3xy^2+8=0 \wedge (y=0 \vee y=x\sqrt{3} \vee y=-x\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Wieder betrachten wir die einzelnen Fälle:

- $y = 0$: Es ergibt sich
$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$
für $x \in \mathbb{R}$.
- $y = x\sqrt{3}$: Es ergibt sich
$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
für $x \in \mathbb{R}$. Also gibt es die Lösung $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
- $y = -x\sqrt{3}$: Es ergibt sich
$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
für $x \in \mathbb{R}$. Also gibt es die Lösung $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Insgesamt gibt es also genau die Lösungen $z_0 = -2$, $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(d) Dem Hinweis folgend, machen wir den Ansatz $z = (1 + \mathrm{i})x$. Einsetzen in die Gleichung liefert:
$$\begin{aligned}
& ((1+\mathrm{i})x)^3 - (3-\mathrm{i})((1+\mathrm{i})x)^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1 + 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 - \mathrm{i})x^3 - (3-\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2)x^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (-2 + 2\mathrm{i})x^3 - (3-\mathrm{i})2\mathrm{i}x^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \wedge 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0
\end{aligned}$$

Addieren der beiden letzten Gleichungen liefert:
$$-8x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Also sind $z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ und $z_1 = \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ zwei der gesuchten Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i}$. Nach dem Satz über die Polynomdivision lässt sich P durch $Q = (z - z_0) \cdot (z - z_1) = (z - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) \cdot (z + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) = \left(z^2 - \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\right) = z^2 - \mathrm{i}$ dividieren. Tatsächlich ergibt die Polynomdivision:
$$z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = (z^2 - \mathrm{i}) \cdot (z - (3 - \mathrm{i}))$$

Die letzte Nullstelle lautet also $z_2 = (3 - \mathrm{i})$.