Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
14.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 17:
Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Aufgabe 18:

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn ihre beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren und $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$ gilt.

(b) Demonstrieren Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Konvergenz der Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ allein nicht ausreicht.

Aufgabe 19:
Untersuchen Sie die rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{2+4b_n}{4+3b_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

Aufgabe 20:
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = n - n(1 - \frac{1}{n})^5 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(d) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(e) $a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(f) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 21:
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{7n^7(1+\frac{1}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2)(n^5+\sqrt{n+1})n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right)^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(c) $a_n = \frac{(1+n)^{42}-n^{42}}{n^{41}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(d) $a_n = n^4 \left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1 \right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(e) $a_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}(2j-1)}{\sum_{k=1}^{n} 2k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(f) $a_n = \sqrt[n]{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 22:
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

(a) $a_n = \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}$ fest

(b) $a_n = \left(1+\frac{1}{k+n}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}$ fest

(c) $a_n = \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[16]{n}}\right)^8 + \left(1+\frac{1}{n^{25}}\right)^{19}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}{2+\frac{1}{\sqrt[9]{n}}+\frac{1}{(11)^n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(d) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(e) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(f) $a_n = \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ a > 0$ fest