Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
22.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 17:

(a) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a = 2$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = 2\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = 2\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon) := \frac{2}{\varepsilon}$.
□

(b) Nach Obigem gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Also gilt $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < 10^{-10}$ ab $n_0 = 2 \cdot 10^{10}$.

Aufgabe 18:

(a) $\Rightarrow$: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgelegt. Da $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, existiert ein $n_0(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Wegen $2k > k$ und $2k+1 > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt erst recht $|a_{2n} - a| < \varepsilon$ und $|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Dies beweist die Konvergenz von $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

$\Leftarrow$: Seien $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgelegt. Da $a_{2n} \to a$ und $a_{2n+1} \to a$ $(n \to \infty)$ existieren $n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon) \qquad \text{bzw.} \qquad |a_{2n+1} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon).$$

Definiere $n_2(\varepsilon) := 2 \cdot \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\} + 1$.

Behauptung: Für alle $n \geq n_2(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.
Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- n ist gerade: Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Ferner gilt

$$n = 2k \geq n_2(\varepsilon) = 2 \cdot \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\} + 1 \geq 2n_0(\varepsilon) \Rightarrow k \geq n_0(\varepsilon)$$

  und damit $|a_{2k} - a| = |a_n - a| < \varepsilon$.

- n ist ungerade: Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k+1$. Ferner gilt

$$n = 2k+1 \geq n_2(\varepsilon) = 2 \cdot \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\} + 1 \geq 2n_1(\varepsilon) + 1 \Rightarrow k \geq n_1(\varepsilon)$$

  und damit $|a_{2k+1} - a| = |a_n - a| < \varepsilon$.

Dies beweist die Behauptung. Die Behauptung ist liefert $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.
□

(b) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist. Allerdings gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

Aufgabe 19:

(a) Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein: $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.3 (3) gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+a}$$

Auflösen nach a liefert:

$$a^2 = |2+a| \overset{a\geq 0}{\Leftrightarrow} a^2 = 2 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \right\}$$

Wegen $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 < 0$ muss $a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = 2$ gelten.
Behauptung: $|a_n - 2| \leq (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
Beweis (Induktion über n): IA ($n = 1$): In der Tat gilt $|a_1 - 2| = \left|\sqrt{2} - 1\right| \left(\frac{1}{2}\right)^0$. IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die IV $|a_n - 2| \leq (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Dann gilt für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - 2| &= \left|\sqrt{2+a_n} - 2\right| = \left|\left(\sqrt{2+a_n} - 2\right) \cdot \frac{\sqrt{2+a_n} + 2}{\sqrt{2+a_n} + 2}\right| = \left|\frac{(2+a_n) - 4}{\sqrt{2+a_n} + 2}\right| \\
&= \left|\frac{a_n - 2}{\sqrt{2+a_n} + 2}\right| = |a_n - 2| \frac{1}{\left|\sqrt{2+a_n} + 2\right|} \\
&\leq |a_n - 2| \frac{1}{2} \overset{(IV)}{\leq} (2 - \sqrt{2}) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.

Wegen $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ gilt nach Vorlesung, dass $\alpha_n := (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$. Satz 6.3 (1) zusammen mit der oben bewiesenen Behauptung liefert $a_n \to 2 \quad (n \to \infty)$.

(b) Angenommen, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $b \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein: $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.3 (3) gilt also $b \geq 0$. Ferner gilt:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+4b_n}{4+3b_n} = \frac{2+4b}{4+3b}$$

Auflösen nach b liefert:

$$4b + 3b^2 = 2 + 4b \Leftrightarrow b^2 = \frac{2}{3} \overset{b\geq 0}{\Leftrightarrow} b = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Also ist $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $b_1 = 1 > b$, liegt die Vermutung, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, nahe. Sei $n \in \mathbb{N}$, es gilt:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2+4b_n}{4+3b_n} - b_n = \frac{2-3b_n^2}{4+3b_n} = 3 \cdot \frac{\frac{2}{3} - b_n^2}{4+3b_n} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - b_n^2 \leq 0 \Leftrightarrow b_n^2 \geq \frac{2}{3} \overset{b_n\geq 0}{\Leftrightarrow} b_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, falls $b_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $b_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Beweis (Induktion über n): IA ($n = 1$): klar. IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die IV $b_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Dann gilt für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{2+4b_n}{4+3b_n} \overset{\text{Polynomdivision}}{=} \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{4+3b_n} = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{10}{4+3b_n}\right) \\
&\overset{\text{(IV)}}{\geq} \frac{1}{3}\left(4 - \frac{10}{4+3\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{10}{4+3\sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{4-3\sqrt{\frac{2}{3}}}{4-3\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{1}{3}\left(4 - 10 \cdot \frac{4-3\sqrt{\frac{2}{3}}}{16 - 9\frac{2}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(4 - 10 \cdot \frac{4-3\sqrt{\frac{2}{3}}}{10}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.

Nach obigem ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach der obigen Behauptung nach unten beschränkt. Nach einem Satz der Vorlesung ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wie anfangs bereits festgestellt wurde, ist der Grenzwert $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Aufgabe 20:

(a) Es folgt mit den Grenzwertsätzen 6.3:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} + 5} = 0$$

(b) Betrachte die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ sowie $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{2k} = 1$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} -1 + \frac{1}{2k+1} = -1.$$

Nach Aufgabe 18 (a) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, es gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= n - n(1-\frac{1}{n})^5 = n(1-(1-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}-\frac{10}{n^3}+\frac{5}{n^4}-\frac{1}{n^5})) \\
&= 5 - \frac{10}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4}
\end{aligned}$$

Folglich ist nach den Grenzwertsätzen 6.3 $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$.

(d) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n &= \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\
&= \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}+3}
\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung und den Grenzwertsätzen 6.3 folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$.

(e) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(f) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \geq \sqrt[n]{3^n} = 3$$

sowie

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 3\sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ (nach Vorlesung), gilt nach Satz 6.3 (4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Aufgabe 21:

(a) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{7n^7(1+\frac{1}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2)(n^5+\sqrt{n+1})n^2} = \frac{7n^5(1+\frac{1}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2)(n^5+\sqrt{n+1})} = \frac{7n^8(1+\frac{1}{n!})(1-\frac{1}{n})}{n^3\left(1+2\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)n^5\left(1+\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^9+\left(\frac{1}{n}\right)^{10}}\right)} \\ &= \frac{7(1+\frac{1}{n!})(1-\frac{1}{n})}{\left(1+2\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)\left(1+\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^9+\left(\frac{1}{n}\right)^{10}}\right)}, \end{aligned}$$

sowie

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Satz 6.3 (4) ist also $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ und die Grenzwertsätze liefern (mit der obigen Darstellung) $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$.

(b) Betrachte die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ sowie $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt $\left|\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{15} = \frac{\sqrt{25}}{15} = \frac{1}{3}$ und damit (nach Vorlesung) $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right)^{2k} = 0$. Hieraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right)^{2k} = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 18 (a) folgt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

(c) Nach der Vorlesung gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Formel

$$a^k - b^k = (a-b) \sum_{m=0}^{k-1} a^{k-1-m} b^m. \tag{1}$$

Ihre Anwendung auf $a = (1+n)$, $b = n$ sowie $k = 42$ liefert

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n) - n}{n^{41}} \sum_{m=0}^{41} (1+n)^{41-m} n^m \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{41} \sum_{m=0}^{41} \left(\frac{n}{1+n}\right)^m = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{41}}_{=1} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{41} \left(\frac{n}{1+n}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{41} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^m}_{=1} = 42.
\end{aligned}$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Formel (1) liefert für $a = \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, $b = \sqrt[10]{1}$ und $k = 10$:

$$\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1 = \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - \sqrt[10]{1} = \frac{3n^{-4} + n^{-9}}{\sum_{m=0}^{9} \sqrt[10]{(1 + 3n^{-4} + n^{-9})^{9-m}}}$$

Folglich ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= n^4 \left(\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1 \right) = n^4 \cdot \frac{3n^{-4} + n^{-9}}{\sum_{m=0}^{9} \sqrt[10]{(1 + 3n^{-4} + n^{-9})^{9-m}}} \\
&= \frac{3 + \left(\frac{1}{n}\right)^5}{\sum_{m=0}^{9} \sqrt[10]{\left(1 + 3\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^9\right)^m}}
\end{aligned}$$

Die Grenzwertsätze liefern zusammen mit dieser Darstellung $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{10}$.

(e) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} (2j-1)}{\sum_{k=1}^{n} 2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sum_{j=1}^{n} j - n}{2\sum_{k=1}^{n} k} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

(f) Konvergente Folgen sind, der Vorlesung nach, beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \ldots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit:

$$a_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n$$

Da die natürlichen Zahlen, laut Vorlesung, nicht nach oben beschränkt sind, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt.

Aufgabe 22:
Definiere vorbereitend $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Laut Vorlesung gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = e$. Als konvergente Folge ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, es existiert also ein $c > 0$ mit $1 \leq b_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}} = \sqrt[k]{b_{kn}}$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k]{e}$.

(b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{k+n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{k+n}\right)^{k+n}}{\left(1+\frac{1}{k+n}\right)^k} = \frac{b_{k+n}}{\left(1+\frac{1}{k+n}\right)^k}$$

Der Zähler konvergiert gegen e, der Nenner gegen 1. Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

(c) Die Grenzwertsätze 6.3 sowie die Beispiele 6.5 liefern

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[16]{n}}\right)^8 &= \left(\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{\sqrt[16]{n}}\right)^8 \\ &= \left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[16]{n}}\right)^8 \\ &= \left(1-\sqrt[16]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)^8 = 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{25}}\right)^{19} &= \left(\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^{25}}\right)^{19} \\ &= \left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{25}}\right)^{19} \\ &= \left(1+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{25}\right)^{19} = 1;\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[9]{n}} = \sqrt[9]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 0$$

sowie, wegen $0 < \frac{1}{11} < 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(11)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{11}\right)^n = 0.$$

Beachtet man schließlich

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},\end{aligned}$$

so folgt, wieder mit den Grenzwertsätzen 6.3:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[16]{n}}\right)^8 + \left(1+\frac{1}{n^{25}}\right)^{19}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}{2+\frac{1}{\sqrt[9]{n}}+\frac{1}{(11)^n}} = \frac{1+1\cdot\frac{1}{e}}{2} = \frac{1+\frac{1}{e}}{2}$$

(d) Sei $n \geq 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1-n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1-n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{b_{n-1}} \end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert gegen 1. Der Nenner konvergiert nach Obigem gegen e. Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

(e) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \sqrt[n]{b_{n^2}} \leq \sqrt[n]{c}$$

Wegen $\sqrt[n]{c} \to 1$ und Satz 6.3 (4) gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(f) Wir unterscheiden drei Fälle:

- $a > 1$: Es gilt $\frac{1}{a} < 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} = 0$. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}} = 1$$

- $a = 1$: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{0}{2} = 0$$

  und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- $a < 0$: Es gilt $a < 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} a^{2n} = 0$. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{2n}-1}{\lim_{n\to\infty} a^{2n}+1} = -1$$