Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
29.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 23:

(a) Für $n = 1$ ist $a_n = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $\sqrt{n} < n$ bzw. $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Deshalb gilt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

Die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 ist klar wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent. Wäre die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ konvergent, so wäre auch die Reihe

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n - \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

konvergent. Aus der Vorlesung ist jedoch bekannt, dass die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergent ist. Also muss die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ divergieren.

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton.

$\square$

Aufgabe 24:

Sei $a_n = \frac{(1+\frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Für ihre Teilfolgen (b_{2n}) bzw. (b_{2n+1}) gilt

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}}{(1+\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \\
b_{2n+1} &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^{2n+2}}{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}\right)^2 \cdot 3^{2n+2}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \infty$ gilt $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$. Eine Entscheidung mit dem Quotientenkriterium ist also nicht möglich.

(b) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Für ihre Teilfolge (b_{2n}) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$. Nach dem Quotientenkriterium folgt die Divergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

$\square$

Aufgabe 25:
Nach Vorlesung gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für das n-te Reihenglied gilt:

$$\begin{aligned} a_n \quad &:= \quad e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \overset{\text{Indexshift}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \end{aligned}$$

Der letzte Faktor ist der Reihenwert der (konvergenten) geometrischen Reihe $\sum_{k\geq 0} x^k$ mit $0 < x = \frac{1}{2} < 1$. Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = 2$. Folglich ist:

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ferner ist $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ konvergent (wieder eine geometrische Reihe). Nach dem Majorantenkriterium ist also $\sum_{n\geq 0} a_n$ (absolut) konvergent.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ Für das n-te Reihenglied gilt:

$$\begin{aligned} b_n \quad &:= \quad e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\overset{\text{Binom}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{\underbrace{n \cdots n}_{k \text{ Faktoren}}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{<1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<1}\right) \overset{k=2}{\geq} \frac{1}{2!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Bekannt aus der Vorlesung ist, dass die harmonische Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ divergent ist. Damit ist auch $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k}$ divergent. Wir haben nachgewiesen:

$$b_n \geq \frac{1}{2n} \geq 0 \qquad \forall n \geq 2$$

Nach dem Minorantenkriterium ist also auch $\sum_{n\geq 1} b_n$ divergent.

Bereits aus der Vorlesung bekannt ist, dass $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ „schneller" gegen e konvergiert als $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. In der Tat ist die Konvergenz *wesentlich* schneller, in dem Sinne, dass die *Residuen* $(e - \sum_{k=0}^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ summierbar bleiben, während die Reihe über $\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent wird.
□

Aufgabe 26:

(a) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt:

$$\begin{aligned} S_N \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1)e^{-n} - ne^{-(n+1)}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-n}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-n}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{e^{-n}}{n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{e} - \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{e^{N+1}} \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe konvergent und es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{e}$.

(b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt:

$$\begin{aligned} S_N \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{4^k} \\ &\overset{\text{Binom!}}{=} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist die N-te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{n\geq 0} x^n$ mit $0 < x = \frac{3}{4} < 1$. Nach der Vorlesung ist der Reihenwert der geometrischen Reihe in diesem Fall $\frac{1}{1-x} = 4$. Also ist die vorliegende Reihe konvergent und es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \lim_{N\to\infty} S_N = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3$

(c) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt:

$$\begin{aligned} S_N \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} 1 - \frac{1}{(N+1)!} \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe konvergent und es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty} S_N = 1$.

(d) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}} = 4x \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(4x)^{n-1}}{(1+2|x|)^{n-1}} \overset{\text{Indexshift}}{=} 4x \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{4x}{1+2|x|}\right)^n$$

Der zweite Faktor ist die $(N-1)$-te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{n\geq 0} y^n$ mit $y = \frac{4x}{1+2|x|}$. Nach der Vorlesung ist die geometrische Reihe genau dann konvergent, wenn $|y| < 1$ ausfällt. Es gilt:

$$|y| < 1 \Leftrightarrow \frac{4|x|}{1+2|x|} < 1 \Leftrightarrow 4|x| < 1 + 2|x| \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

In diesem Fall beträgt der Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-\frac{4x}{1+2|x|}} = \frac{1+2|x|}{1+2(|x|-2x)}$. Folglich gilt dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}} = 4 \cdot \frac{x(1+2|x|)}{1+2(|x|-2x)}$.

Ist $|y| \geq 1$, so ist $x \neq 0$. Folglich muss $\sum_{n\geq 1} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}}$ divergieren, da ansonsten die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} y^n$ mit $|y| \geq 1$ konvergent wäre.

$\square$

Aufgabe 27:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\left|(-1)^n \binom{2n}{n}\right| = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2} = \frac{\prod_{j=n+1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n} j}$$

$$\overset{\text{Indexshift}}{=} \frac{\prod_{j=1}^{n}(n+j)}{\prod_{j=1}^{n} j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n+j}{j} = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left(1+\frac{n}{j}\right)}_{\geq 2} \geq 2^n$$

Wegen $(2^n) \to \infty$ für $n \to \infty$ bildet $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n\binom{2n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Dies ist aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergent.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\right|^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

Wegen $\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) \to \frac{1}{e}$ (vgl. Aufgabe 22 (d)) und $\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right) \to 1$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} < 1$$

Folglich ist $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

(c) Für $0 < a < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \sqrt[n]{a} < 1$, $0 < \sqrt[n+1]{a} < 1$. Deshalb gilt

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n+1]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1}} = \sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} < \sqrt[n+1]{a \cdot 1} = \sqrt[n+1]{a}$$

und folglich ist $(1-\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend. Ferner ist $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ (vgl. letzte Übung). Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ konvergent.

Erinnerung (*dritte binomische Formel*): Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha-\beta)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-1-k}\cdot\beta^k \tag{1}$$

Einsetzen von $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt[n]{a}$ und umstellen nach $\alpha - \beta$ liefert:

$$\left|(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})\right| = 1-\sqrt[n]{a} = \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k}_{\leq 1}} \geq \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1}1} = (1-a)\cdot\frac{1}{n}$$

Da die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1-a}{n} = (1-a)\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergent ist, liefert das Minorantenkriterium zusammen mit der obigen Abschätzung, dass $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ *nicht* absolut konvergent ist.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = (n+1)\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Wegen $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ (absolut) konvergent ist.

(e) Für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n := \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{n+4}{\underbrace{n(n-3)+1}_{>0}} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \geq 0$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ist nach der Vorlesung divergent. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|(-1)^n\left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right]\right| = \left|\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right| = \left|\frac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

und die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent nach Vorlesung. Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right]$ ist nach dem Majorantenkriterium folglich auch absolut konvergent.

□

Aufgabe 28:

(a) Klar: $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ ist konvergent für $x = 0$. Sei also im Folgenden $x \neq 0$. Dann ist $y := x^2 > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{1}{y^{-n}+y^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n}$$

Ist $y = 1$, so gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} = \frac{1}{1^n + 1^n} = \frac{1}{2}$$

und folglich — $\left|\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right| = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ — bildet $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Dies ist aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n\geq 1} a_n$ für $x \in \{-1, 1\}$ divergent.

Ist $y \neq 1$, so ist $y < 1$ oder $\frac{1}{y} < 1$. O.B.d.A. sei $y < 1$. Dann gilt:

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} < \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n} = y^n$$

Weil die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 1} y^n$ mit dem Parameter $|y| = y < 1$ laut Vorlesung konvergent ist und $|a_n| < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausfällt, ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right|} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

und $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

(c) Wegen

$$\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ *nicht* absolut konvergent (harmonische Reihe!).

Für $N \in \mathbb{N}$ sei $S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$. Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Diese ist wiederum, nach Aufgabe 18 (a), genau dann konvergent, wenn ihre beiden Teilfolgen $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ und $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent sind und diese Grenzwerte übereinstimmen.

Wir beginnen mit der Teilfolge $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$. Diese ist genau dann konvergent, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil konvergent ist. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{\mathrm{i}^n}{n} = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} + \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathrm{i}^2)^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathrm{i}^2)^n}{2n} = (-\mathrm{i}) \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n} \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n}}_{=\mathrm{Re}(S_N)} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}_{=\mathrm{Im}(S_N)} \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Re}(S_N)$ gerade die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{2k}$. Diese ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Ferner ist $\mathrm{Im}(S_N)$ gerade die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1) \cdot \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{2k-1}$, welche, ebenfalls nach dem Leibniz-Kriterium, konvergent ist. Damit hat sich $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ als konvergent erwiesen.

Ferner gilt:

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \frac{\mathrm{i}^{2N+1}}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^N}{2N+1}}_{=0} = \lim_{N\to\infty} S_{2N}$$

Damit ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergent.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} b_n &:= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{(3(n+1))^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{(3n)^{n+1}}{(3(n+1))^{n+1}} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Wegen $e > 2$ und

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{3} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{=\frac{1}{e}} = \frac{4}{3e} < \frac{2}{3} < 1$$

folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$ (absolut) konvergent ist.

(e) Für alle $n \geq 16$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} = \frac{n(1 - \frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n^2 + n^2\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}} = \frac{(1 - \frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}})} \\ &\geq \frac{(1 - \frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n} \geq \frac{(1 - \frac{2}{\sqrt{16}})^2}{n} = \frac{1}{4n} \geq 0 \end{aligned}$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ist nach der Vorlesung divergent. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(f) Wir zeigen vorbereitend die

Behauptung: Die Folge

$$(a_n)_{n=3}^{\infty} := (\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$$

ist streng monoton fallend.

Beweis: Sei $n \geq 3$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n > \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^n = \sqrt[n+1]{(n+1)^n} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \\ &\Leftrightarrow \quad n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung bekannt ist, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e < 3$ gilt und, dass $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Damit folgt

$$n \geq 3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall n \geq 3$$

Mit der obigen Äquivalenzkette sieht man die Behauptung ein.
$\square$

Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ ist äquivalent zur absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 3} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$. Mit der obigen Behauptung sieht man ein, dass die Reihenglieder $(b_n)_{n\geq 3} := \left(\frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}\right)_{n\geq 3}$ positiv sind. Es reicht also, die Konvergenz der

Partialsummenfolge $(S_N) = \left(\sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}\right)$ nachzuweisen. Da diese Folge monoton wachsend ist, reicht es aus ihre Beschränktheit (nach oben) zu zeigen. Sei dazu $N \geq 3$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n} = \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n} \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=3}^{N} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=4}^{N+1} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{\sqrt[3]{3}}{3} - \frac{\sqrt[N+1]{N+1}}{N+1} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{3}
\end{aligned}
$$

Also ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ absolut konvergent.

$\square$