Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
28.11.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 29:
Seien $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ und $\sum_{k\geq 0} b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit Konveregenzradien $\rho_1 > 0$ bzw. $\rho_2 > 0$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n$ einen Konvergenzradius $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$ hat und für $|z| < \rho$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

Aufgabe 30:
Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Reihenwert.

(a) $\sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$

(b) $\sum_{n\geq 1} n z^n$

(c) $\sum_{n\geq 1} n^2 z^n$

Aufgabe 31:
Aus der Vorlesung sind Ihnen die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ bekannt. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} & \text{für } k > 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ nennt man die Potenzreihe $B_\alpha(z) := \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} z^k$ die *Binomialreihe*. Im Falle der Konvergenz bezeichnet $B_\alpha(z)$ auch den Reihenwert.

(a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq \alpha$ gilt: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!k!}$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot \binom{\beta}{n-k}$$

(c) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ die Binomialreihe $B_\alpha(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert und für den Reihenwert $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = (1+z)^\alpha$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ die Binomialreihe $B_\alpha(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergiert.

(e) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$B_\alpha(z) \cdot B_\beta(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{k} z^k = B_{\alpha+\beta}(z)$$

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 32:

Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(a) $\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$

(b) $\sum_{n\geq 1} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$

(c) $\sum_{n\geq 2} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

Aufgabe 33:

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

(b) $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{(n^2)}$

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Aufgabe 34:

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n\geq 0} n! z^n$

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n} (z - 2\mathrm{i})^n$

(c) $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n^2)} z^{4n}$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 29, 31 und 33 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.