Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
06.12.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 29:
Aus der Vorlesung (Abschnitt 7.10) ist der Satz über das *Cauchy-Produkt* bekannt:

Satz. *Sind die Reihen $\sum_{n\geq 0} c_n$ und $\sum_{n\geq 0} d_n$ absolut konvergent, so ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} c_{n-k}d_k$ absolut konvergent und für den Reihenwert gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_{n-k}d_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n\right)$$

Sei nun $|z| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$. Dann konvergieren beide Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut. Ihr Cauchy-Produkt lautet:

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}z^{n-k}b_k z^k = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) z^n$$

Nach dem oben zitierten Satz konvergiert dieses Cauchy-Produkt absolut und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

Aus der Vorlesung (Abschnitt 7.14) ist ferner bekannt, dass die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) z^n$ für alle $|z| > \rho$ divergiert. Da nach Obigem das Cauchy-Produkt für alle $|z| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ konvergiert, muss $|z| \leq \rho$ ausfallen. Deshalb gilt $\min\{\rho_1, \rho_2\} \leq \rho$.
$\square$

Aufgabe 30:

(a) Es gilt:

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} z^{n-k}z^k \overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)\cdot\left(\sum_{k\geq 0} z^k\right)$$

Der Konvergenzradius ρ der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $\rho = 1$. Nach Aufgabe 29 konvergiert $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ für $|z| < 1$ absolut und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$.

Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$|(n+1)z^n| = (n+1)\,|z|^n \geq n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Damit ist bildet $((n+1)z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ ist divergent.

(b) Es gilt:

$$\sum_{n\geq 1} nz^n = z\cdot \sum_{n\geq 1} nz^{n-1} \overset{\text{Index-Shift}}{=} z\cdot \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$$

Mit Aufgabenteil (a) folgt: $\sum_{n\geq 1} nz^n$ ist für $|z|\geq 1$ divergent. Für $|z|<1$ ist die Reihe absolut konvergent und für den Reihenwert gilt $\sum_{n\geq 1} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$.

(c) Für $|z|\geq 1$ gilt:

$$\left|n^2 z^n\right| = n^2\,|z|^n \geq n^2 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Damit bildet $(n^2z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^2z^n$ ist divergent.

Aus der Vorlesung ist die folgende Summenformel bekannt:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{n} k = n^2+n \Leftrightarrow n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

Damit folgt:

$$\sum_{n\geq 1} n^2z^n = \sum_{n\geq 0} z^n\left(2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)-n\right) = 2\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}(z^{n-k})(kz^k) - \sum_{n\geq 0} nz^n$$

Für $|z|<1$ folgt mit Aufgabe 29 und Aufgabenteil (b), dass $\sum_{n\geq 1} n^2z^n$ absolut konvergent ist und der Reihenwert

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} kz^k\right) - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = 2\cdot\frac{1}{1-z}\cdot\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2}\\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\left(\frac{2}{1-z}-1\right) = \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\frac{1+z}{1-z} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

beträgt.

□

Aufgabe 31:

(a) Sei $\alpha, k\in\mathbb{N}_0$ mit $k\leq\alpha$. Für $k=0$ gilt per Definition $\binom{\alpha}{k}=1$. Für den Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{0}$ gilt:

$$\binom{\alpha}{0} = \frac{\alpha!}{(\alpha-0)!(0)!} = \frac{\alpha!}{\alpha!} = 1$$

Für $k\geq 1$ gilt hingegen

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{\alpha-1}(\alpha-j)}{k!\prod_{j=k}^{\alpha-1}(\alpha-j)} \overset{\text{Umordnung}}{=} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha} j}{k!\prod_{j=1}^{\alpha-k} j} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!k!},$$

was mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ übereinstimmt.

(b) Wir zeigen zuerst:

$$n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0 \tag{1}$$

Für $n=0$ ergibt sich die Identität (1) direkt aus der Definition. Für $n=1$ gilt:

$$n\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha}{1} = \frac{\prod_{j=0}^{1-1}(\alpha-j)}{1!} = \frac{\prod_{j=0}^{1-1}(\alpha-j)}{1!} = \alpha = \alpha\binom{\alpha-1}{0}$$

Für $n \geq 2$, so gilt:

$$\begin{aligned}
n\binom{\alpha}{n} &= n \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{n!} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{(n-1)!} = \alpha \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\alpha - j)}{(n-1)!} \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \alpha \cdot \frac{\prod_{j=0}^{(n-1)-1}(\alpha - (j+1))}{(n-1)!} = \alpha \cdot \frac{\prod_{j=0}^{(n-1)-1}((\alpha - 1) - j)}{(n-1)!} = \alpha\binom{\alpha - 1}{n-1}
\end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis der Indentität (1) ab.

Wir führen nun einen Induktionsbeweis der zu beweisenden Aussage:
IA ($n = 0$):

$$\binom{\alpha + \beta}{0} = 1 = \sum_{k=0}^{0} \underbrace{\binom{\alpha}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{\binom{\beta}{0}}_{=1}$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und für dieses n gelte die IV:

$$\binom{\alpha + \beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot \binom{\beta}{n-k} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für $n + 1 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(n+1)\sum_{k=0}^{n+1}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} &= \sum_{k=0}^{n+1}(((n+1) - k) + k)\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)\binom{\beta}{n+1-k}\binom{\alpha}{k} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \alpha\binom{\alpha - 1}{k-1}\binom{\beta}{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \beta\binom{\beta - 1}{n-k}\binom{\alpha}{k} \\
&= \alpha\sum_{k=1}^{n+1}\binom{\alpha - 1}{k-1}\binom{\beta}{n+1-k} + \beta\sum_{k=0}^{n}\binom{\beta - 1}{n-k}\binom{\alpha}{k} \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha - 1}{k}\binom{\beta}{n-k} + \beta\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta - 1}{n-k} \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \alpha\binom{\alpha - 1 + \beta}{n} + \beta\binom{\alpha + \beta - 1}{n} = (\alpha + \beta)\binom{\alpha + \beta - 1}{n}
\end{aligned}$$

Teilt man beide Seiten durch $n + 1$, so ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n+1-k} = \frac{\alpha + \beta}{n+1} \cdot \binom{\alpha + \beta - 1}{n} \overset{(1)}{=} \binom{\alpha + \beta}{n+1}$$

Dies schließt den Beweis der Aussage ab.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und $k > \alpha$, d.h. $k - 1 \geq \alpha$. Dann gilt:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} = \frac{(\alpha - \alpha) \cdot \prod_{j=0, j \neq \alpha}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} = 0$$

Für $0 \leq k \leq \alpha$ stimmen $\binom{\alpha}{k}$ nach Teilaufgabe (a) mit den Binomialkoeffizienten überein. Folglich gilt für die Partialsummen S_K der Binomialreihe $B_\alpha(z)$ mit $K \geq \alpha$:

$$S_K = \sum_{k=0}^{K}\binom{\alpha}{k}z^k = \sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}1^{\alpha - k}z^k = (1 + z)^\alpha$$

Also ist die Reihe $B_\alpha(z)$ in der Tat absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit Reihenwert $(1+z)^\alpha$.

(d) Sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Es gilt $(\alpha - j) \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Es folgt aus der Definition, dass $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wir können also versuchen den Konvergenzradius ρ von $B_\alpha(z)$ mit Hilfe des Satzes 7.15 (Folgerung aus dem Quotientenkriterium) zu zeigen:

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}\right| = \left|\frac{\prod_{j=0}^{k}(\alpha - j)}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}\right| = \left|\frac{\prod_{j=0}^{k}(\alpha - j)}{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)} \cdot \frac{k!}{(k+1)!}\right| = \left|\frac{\alpha - k}{k+1}\right| \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Also gilt $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1$ und $\rho = \frac{1}{1} = 1$. Nach Abschnitt 7.14 konvergiert $B_\alpha(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho = 1$.

(e) Nach Teilaufgabe (c) und (d) haben die Potenzreihen $B_\alpha(z)$, $B_\beta(z)$ und $B_{\alpha+\beta}(z)$ jeweils einen Konvergenzradius $\rho \geq 1$. Nach Aufgabe 29 gilt also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ (Cauchy-Produkt):

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n-k}\binom{\beta}{k}\right) z^n \overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} z^n$$

□

Aufgabe 32:

(a) Sei $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt mit der Formel von Cauchy-Hadamard, dass der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{1} = 1$ ist.

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt, bildet (a_n) keine Nullfolge. Deshalb divergiert die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ für $|z| = 1$.

(b) Die Reihe hat die Form $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt:

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{e^{n(1+(-1)^n)}} = \begin{cases} \sqrt[2n]{e^{2n}} = e & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \sqrt[2n]{e^0} = 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ferner ist $\sqrt[2n+1]{|a_{n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist somit $\rho = e^{-1}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = e^{-1}$ gilt

$$\left|a_{4n} z^{4n}\right| = e^{2n(1+(-1)^{2n})} \, |z|^{4n} = e^{4n} e^{-4n} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Somit ist in diesem Fall $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ divergent.

(c) Sei $a_n := \frac{2n+1}{(n-1)^2}$ für alle $n \geq 2$. Offenbar gilt $a_n > 0$ für alle $n \geq 2$. Wir können daher versuchen, den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ mit Hilfe des Satzes 7.15 (Folgerung aus dem Quotientenkriterium) zu bestimmen. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2(n+1)+1}{(n+1-1)^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2n+1} = \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

für alle $n \geq 2$ und folglich $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. Folglich ist $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

Für $x = 1$ gilt

$$a_n x^n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

für alle $n \geq 2$. Folglich ist die Reihe $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

Wegen

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2(n+1)+1}{n^2} = a_{n+1}$$

für alle $n \geq 2$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} = 0$ ist die Reihe $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibniz-Kriterium.

□

Aufgabe 33:

(a) Die Reihe hat die Form $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ist absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Majorantenkriterium (Exponentialreihe $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ist absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$).

(b) Die Reihe hat die Form $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2^m & \text{falls } n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{|a_{m^2}|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{2^m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{2} = 1$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist $\rho = \frac{1}{1} = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Deshalb ist in diesem Fall $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ divergent.

(c) Die Reihe hat die Form $\sum_{n\geq 1} a_n (z - z_0)^n$ mit $z_0 = -3\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ρ bestimmt sich nach der Formel von Cauchy-Hadamard zu:

$$\rho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Folglich ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho = 1$ absolut konvergent. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = 1$ ist $\sum_{n\geq 1} a_n (z - z_0)^n$ absolut konvergent, da $\sum_{n\geq 1} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist nach Vorlesung.

□

Aufgabe 34:

(a) Nach Aufgabe 21 (f), ist die Folge $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt. Folglich gilt nach der Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} n! z^n$:

$$\rho = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\right)^{-1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Folglich ist die Potenzreihe nur für $z = 0$ (absolut) konvergent.

(b) Die Reihe hat die Form $\sum_{n\geq 1} a_n(z-z_0)^n$ mit $z_0 = 2\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ρ bestimmt sich nach der Formel von Cauchy-Hadamard zu:

$$\rho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Folglich ist die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

(c) Die Reihe hat die Form $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mit $a_{4n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$ und $a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[4m]{|a_{4m}|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[4m]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{(m^2)}} = \sqrt[4]{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} = \sqrt[4]{e}$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist $\rho = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

□