Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
05.12.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 35:

(a) Untersuchen Sie die durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum_{n\geq 0} g_n$ mit

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(c) Sei $0 \leq a < 1$. Untersuchen Sie die durch

$$h_n : [a,1] \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,1]$$

definierte Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 36:

(a) Untersuchen Sie die durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^5x^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum_{n\geq 0} g_n$ mit

$$g_n : (-1,1] \to \mathbb{R},\ g_n(x) = x^n(1-x) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in (-1,1]$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(c) Sei $0 \leq a < 1$. Untersuchen Sie die durch

$$h_n : [a,\infty) \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{1}{1+nx} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,\infty)$$

definierte Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 37:
Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(a) $D = [0,1],\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } 1 \neq x \in D, \\ y_0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

(b) $D = (0,\infty),\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^r-1}{x-1} & \text{für } 1 \neq x \in D \\ y_0 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{Q} \text{ fest})$

(c) $D = [0,\pi],\ f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} & \text{für } 0 \neq x \in D, \\ y_0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 38:
Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(a) $D = (0,\infty),\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) & \text{für } 2 \neq x \in D, \\ y_0 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

(b) $D = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } 0 \neq x \in D, \\ y_0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(c) $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} & \text{für } 0 \neq x \in D \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 39:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, es existiert ein $x_M \in \mathbb{R}$ so, dass

$$|f(x)| \leq |f(x_M)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ausfällt.

Aufgabe 40:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $y_0 := f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right)$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 35, 37 und 39 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.