Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
13.12.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 35:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Ist $x = 0$, so ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $x \neq 0$, so gilt:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+n^2x^4}\right| = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \leq \frac{nx^2}{n^2x^4} = \frac{1}{nx^2} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Also ist $f_n \to 0$ punktweise für $n \to \infty$.

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ fest. Definiere $y := nx^2$. Es gilt:

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} = \frac{y}{1+y^2} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y = 1 + y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

D.h. zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ mit $|f_n(x_n) - 0| = \frac{1}{2}$. Dies ist gerade die Verneinung der Aussage: „$f_n \to 0$ gleichmäßig für $n \to \infty$“ Somit ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n$$

konvergent ist und wegen

$$|g_n(x)| = e^{-n(1+x+x^2)} \leq e^{-\frac{3n}{4}} = \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktionenreihe $\sum_{n\geq\mathbb{N}} g_n$ gleichmäßig konvergent nach dem Kriterium (b) für gleichmäßige Konvergenz.

(c) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt:

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

Also ist $h_n \to 1$ punktweise für $n \to \infty$.

Da für alle $x \in [a, 1]$ sowie alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |h_n(x) - 1| &= \left|\sqrt[n]{n^2x} - 1\right| = \left|\sqrt[n]{n^2x} - \sqrt[n]{n^2a} + \sqrt[n]{n^2a} - 1\right| \leq \left|\sqrt[n]{n^2x} - \sqrt[n]{n^2a}\right| + \left|\sqrt[n]{n^2a} - 1\right| \\ &\overset{x\geq a}{=} \sqrt[n]{n^2x} - \sqrt[n]{n^2a} + \left|\sqrt[n]{n^2a} - 1\right| \overset{x\leq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2a} + \left|\sqrt[n]{n^2a} - 1\right| =: \alpha_n \end{aligned}$$

und $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge h_n gleichmäßig konvergent nach dem Kriterium (a) für gleichmäßige Konvergenz.

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen h punktweise, wobei $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt ist. Weil h nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Kriterium (d) für gleichmäßige Konvergenz).

□

Aufgabe 36:

(a) Betrachte zunächst die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$F(y) = \frac{y}{1+y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

erklärt ist. Wegen $0 \leq (1 - |y|)^2 = 1 - 2|y| + y^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|F(y)| = \frac{|y|}{1+y^2} \leq \frac{\frac{1+y^2}{2}}{1+y^2} = \frac{1}{2}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Wegen

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n^2 x}{1 + n^5 x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left| F\left(\sqrt{n}^5 x\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} =: \alpha_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ und da $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert f_n gleichmäßig gegen 0 für $n \to \infty$ nach dem Kriterium (a) für gleichmäßige Konvergenz.

(b) Sei $x = 1$, dann ist $g_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deswegen ist $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = 0$. Ist $x < 1$, so ist $|x| < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} x^n$ ist (absolut) konvergent. Deshalb gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

Damit konvergiert $\sum_{n\geq 0} g_0$ punktweise gegen die Funktion $g : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 1, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt ist. Weil g nicht stetig bei 1 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Kriterium (d) für gleichmäßige Konvergenz).

(c) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt für alle $x \in [a, \infty)$ sowie alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|h_n(x)| = \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + na} \leq \frac{1}{na} =: \alpha_n$$

Da $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge h_n gleichmäßig konvergent gegen die Nullfuntion nach dem Kriterium (a) für gleichmäßige Konvergenz.

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Für $x \neq 0$ gilt:

$$h_n(x) = h_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen h punktweise, wobei $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt ist. Weil h nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Kriterium (d) für gleichmäßige Konvergenz).

Aufgabe 37:

(a) Da f für alle $x \in D \setminus \{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to1} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)} \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.

(b) Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Da f für alle $x \in D \setminus \{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to1} f(x) = y_0$ gilt. Wir behandeln zunächst den Fall $r \geq 0$ ($\Leftrightarrow p \in \mathbb{N}_0$). Sei $x \in D \setminus \{1\}$. Definiere $y := \sqrt[q]{x}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel:

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x-1} = \frac{y^p - 1^p}{y^q - 1^q} = \frac{1^p - y^p}{1^q - y^q} = \frac{(y-1)\sum_{k=0}^{p-1} y^k}{(y-1)\sum_{k=0}^{q-1} y^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} y^k}{\sum_{k=0}^{q-1} y^k}$$

Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \sqrt[q]{x}^k}{\sum_{k=0}^{q-1} \sqrt[q]{x}^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r$$

gewählt werden.

Ist $r < 0$ ($\Leftrightarrow \tilde{p} := -p \in \mathbb{N}$), so gilt:

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt[q]{x}^{\tilde{p}}} - 1}{\sqrt[q]{x}^q - 1} = \frac{\frac{1}{y^{\tilde{p}}} - 1}{y^q - 1^q} = \frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{1 - y^{\tilde{p}}}{y^q - 1^q} = -\frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{y^{\tilde{p}} - 1}{y^q - 1^q} \overset{\text{s.o.}}{=} -\frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} y^k}{\sum_{k=0}^{q-1} y^k}$$

Folglich muss auch in diesem Fall

$$y_0 := \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} -\frac{1}{\sqrt[q]{x}^{\tilde{p}}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} \sqrt[q]{x}^k}{\sum_{k=0}^{q-1} \sqrt[q]{x}^k} = -\frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r$$

gewählt werden.

(c) Da f für alle $x \in D \setminus \{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) \quad &= \quad \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} = \frac{x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}} \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \quad \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}} = -\frac{x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}}{x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}} = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}}
\end{aligned}$$

Da die PR $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ und $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}$ den gemeinsamen Konvergenzradius $\rho = \infty$ haben, definieren sie die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 8.7 (Stetigkeit von Potenzreihen), sind f_1 und f_2 stetig. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-f_1(x)}{f_2(x)} = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

gewählt werden.

□

Aufgabe 38:

(a) Da f für alle $x \in D \setminus \{2\}$ stetig ist, reicht es $f(2) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = y_0$ gilt. Da $x = 2$ eine Nullstelle des Polynoms $8 - x^3$ ist, lässt es sich nach Satz 5.5 (Polynomdivision) durch den Linearfaktor $(x-2)$ teilen. Wir erhalten:

$$8 - x^3 = (x-2)\cdot(-x^2-2x-4)$$

Damit gilt für alle $x \in D \setminus \{2\}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\left(1 - \frac{12}{x^2+2x+4}\right) \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+2x+4-12}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}
\end{aligned}$$

Weitere Polynomdivision liefert $x^2 + 2x - 8 = (x-2)\cdot(x+4)$ und folglich

$$f(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2-x}\cdot\frac{(2-x)(-x-4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+4)}{x^2+2x+4}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{4}$ gewählt werden.

(b) Da f für alle $x \in D \setminus \{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Sei $x \in D \setminus \{0\}$. Definiere $y := \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} = \sqrt{y^2+y} - \sqrt{y^2-y} = \frac{y^2+y-(y^2-y)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{y^2-y}} \\
&= \frac{2y}{y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)}
\end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} = 1$ gewählt werden.

(c) Da f für alle $x \in D \setminus \{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n}{x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^{n+1}}{x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n}{\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}} \end{aligned}$$

Da die PR $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!}x^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$ und $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ den gemeinsamen Konvergenzradius $\rho = \infty$ haben, definieren sie die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n, \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 8.7 (Stetigkeit von Potenzreihen), sind f_1, f_2 und f_3 stetig. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{f_3(x)} = \frac{f_1(0) + f_2(0)}{f_3(0)} = 2$$

gewählt werden.

□

Aufgabe 39:

Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$.
Behauptung: es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > N$ gilt $|f(x)| < \varepsilon$.
Beweis der Behauptung: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $x_N \in \mathbb{R}$ derart, dass $|x_N| > N$ ist, aber $|f(x_N)| \geq \varepsilon$. Klar: die Folge $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt. O.B.d.A. ist sie nicht nach oben beschränkt. Laut Vorlesung (Bemerkung nach 6.10) besitzt sie eine Teilfolge $(x_{N(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{N(k)} = \infty$. Wegen der Annahme gilt aber $\left|f(x_{N(k)})\right| \geq \epsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also $f(x_{N(k)}) \not\to 0$ für $k \to \infty$. Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Also muss die Annahme verworfen werden und die Behauptung ist bewiesen.
Laut Satz 8.15 existiert ein $x_M \in [-N, N]$ derart, dass für die stetige Funktion $g : [-N, N] \to \mathbb{R}$, die durch $g(x) := |f(x)|$ erklärt ist, gilt:

$$g(x) \leq g(x_M) \quad \forall x \in [-N, N]$$

Für jedes $x \in [-N, N]$ gilt also $|f(x)| \leq |f(x_M)|$. Für jedes $x \notin [-N, N]$ gilt aber:

$$|f(x)| < |f(x_0)| \overset{x_0\in[-N,N]}{\leq} |f(x_M)|$$

□

Aufgabe 40:

Sei $y_1 := f(\frac{1}{2})$ und $d := y_1 - y_0$. Betrachte die stetige Abbildung $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, die durch $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{2} + x)$ erklärt ist. Es gilt:

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = y_0 - y_1 = -d \qquad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = y_1 - y_0 = d$$

Also liegt 0 zwischen $g(0) = -d$ und $g(\frac{1}{2}) = d$. Nach dem Zwischenwertsatz 8.9 existiert ein $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(x_1) = f(x_1) - f(\frac{1}{2} + x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{2} + x_1)$. Dies war zu zeigen.
□

http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm1phys2013w/