

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 41:

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

- N ist abgeschlossen.
- Ist N nach unten beschränkt und nicht leer, so existiert ein $x \in N$ mit $x \leq y$ für alle $y \in N$.

Aufgabe 42:

Berechnen Sie die in der folgenden Tabelle

φ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\cos(\varphi)$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0				-1
$\sin(\varphi)$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1				0
$\tan(\varphi)$	0		1		n.d. ¹				0

fehlenden Werte für

- $\varphi = \frac{3}{4}\pi$,
- $\varphi \in \{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$ und
- $\varphi \in \{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\}$.

Aufgabe 43:

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3} + i$ und $w = 2 + 2\sqrt{3}i$ die Darstellung in Polarkoordinaten von:

- $\frac{1}{z}$
- $(\frac{1}{z})^{13}$
- w^7
- $\frac{w^7}{z^{13}}$

¹nicht definiert

Aufgabe 44:

Seien die folgenden Teilmengen von \mathbb{C} gegeben:

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{3}{2} \leq |z| \leq 5\right\}, \quad C = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z) \leq -\frac{1}{3}\pi\right\}$$

(a) Deuten Sie die folgenden Mengen geometrisch: B , A , $S := C \cap A$

(b) Skizzieren Sie die Menge $T := B \cup S \cup e^{i\frac{2\pi}{3}}S \cup e^{-i\frac{2\pi}{3}}S$

Aufgabe 45:

Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = 2 \left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|$$

gegeben ist. Folgern Sie, dass die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ein n -Eck mit Umfang $L_n = 2n \left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|$ bilden. Zeigen Sie schließlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\pi$$

Interpretieren Sie das Ergebnis und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Aufgabe 46:

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

(b) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$

(c) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$

(d) $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(e) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 41, 42 (a), 44 und 46

(a) - (b) besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.