Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
20.12.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 41:

(a) Sei (x_n) eine konvergente Folge in N mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist: $x_0 \in N$

Da $N \subseteq D$ und D abgeschossen ist, gilt $x_0 \in D$. Weil f stetig ist, gilt:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\overset{x_n \in N}{=}0} = 0$$

Damit ist $x_0 \in N$.

(b) Weil N nicht leer und nach unten beschränkt ist, existiert nach Abschnitt 4.5 der Vorlesung $m := \inf N$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existiert ein $x_n \in N$ mit $m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n}$ (sonst wäre $m + \frac{1}{n} > m$ eine untere Schranke von N — ein Widerspruch zur Definition von $\inf N$). Nach dem Einschnürungssatz (Abschnitt 6.3 (4) der Vorlesung) gilt $x_n \to m$ für $n \to \infty$. Da N, laut Teilaufgabe (a), abgeschlossen ist, gilt $m \in N$. Das war zu zeigen.

□

Aufgabe 42:

(a) Es gilt

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \overset{9.2\,(2)}{=} -\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \overset{9.2\,(12)}{=} -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

sowie

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \overset{9.2\,(2)}{=} -\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \overset{9.2\,(12)}{=} \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung gilt für alle $\varphi \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\sin(3\varphi) &= \sin(2\varphi + \varphi) = \sin(2\varphi)\cos(\varphi) + \cos(2\varphi)\sin(\varphi) \\
&= (\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi))\cos(\varphi) + (\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\sin(\varphi))\sin(\varphi) \\
&= 2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) + \sin(\varphi)\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) = \sin(\varphi)\left(3\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 7.12 (2) der Vorlesung gilt $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dadurch lässt sich $\cos^2(\varphi)$ in der obigen Gleichung eliminieren:

$$\sin(3\varphi) = \sin(\varphi)\left(3(1 - \sin^2(\varphi)) - sin^2(\varphi)\right) = \sin(\varphi)\left(3 - 4\sin^2(\varphi)\right)$$

Einsetzen von $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ liefert:

$$0 = \sin(\pi) = \sin\left(3 \cdot \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\left(3 - 4\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

Nach (9) im Abschnitt 9.2 der Vorlesung gilt $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \neq 0$. Folglich ist

$$\left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nach Abschnitt 9.3 der Vorlesung ist $\sin(\varphi) > 0$ für $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Also ist $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach dem gleichen Abschnitt ist $\cos(\varphi) > 0$ für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ und damit

$$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \sqrt{3}.$$

Wie in Teilaufgabe (a) folgt

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

sowie

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = -\sqrt{3}.$$

(c) Die bereits zitierten Additionstheoreme liefern

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{C}$$

Durch Beziehung $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ lässt sich $\sin^2(\varphi)$ in der obigen Gleichung eliminieren. Dies liefert:

$$\frac{\cos(2\varphi) + 1}{2} = \cos^2(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Einsetzen von $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ und Ausnutzen des bekannten Funktionswertes bei $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ liefert:

$$\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + 1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Damit folgt

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wie in Teilaufgabe (a) bestimmen sich die restlichen Werte:

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = -\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{sowie}$$

$$\tan\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = -\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

□

Aufgabe 43:
Zunächst werden z und w in Polarkoordinaten dargestellt. Für die Beträge gilt:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2, \quad |w| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

Für die Argumenten gilt nach Abschnitt 9.6 der Vorlesung ($\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$):

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arg(w) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Es folgt damit:

$$z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \quad w = 4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

(a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

(b) $\left(\frac{1}{z}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} e^{-\mathrm{i}\frac{13}{6}\pi} = \frac{1}{8192}e^{\mathrm{i}\pi(2-\frac{13}{6})} = \frac{1}{8192}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

(c) $w^7 = \left(4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^7 = 4^7 e^{\mathrm{i}\frac{7}{3}\pi} = 2^{14}e^{\mathrm{i}\pi(2+\frac{1}{3})} = 16384e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

(d) $\frac{w^7}{z^{13}} = \frac{2^{14}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})}}{2^{13}} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

□

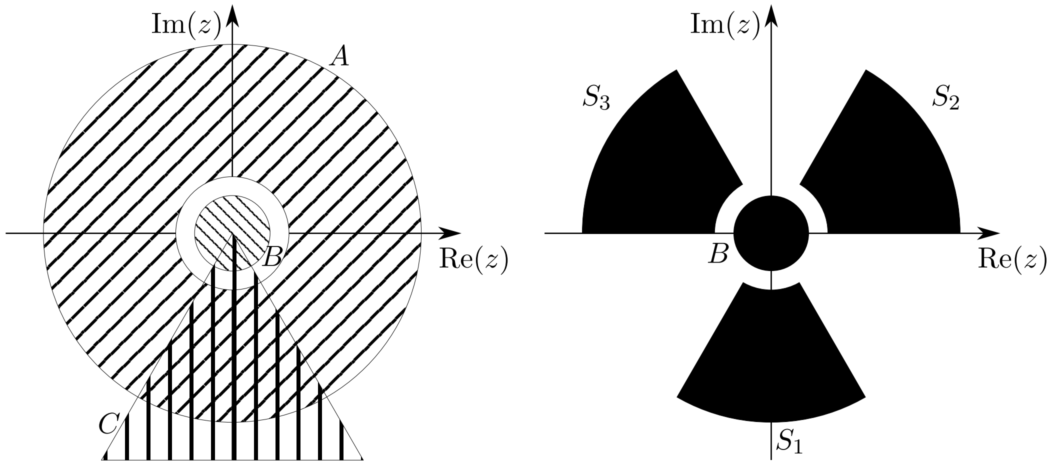
Aufgabe 44:

(a) Siehe auch die Abbildung (1a).
- B ist die abgeschlossene Kreisscheibe um 0 mit Radius 1
- A ist der abgeschlossene Kreisring um 0 mit Innenradius $\frac{3}{2}$ und Außenradius 5
- $S = C \cap A = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| -\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z) \leq -\frac{1}{3}\pi \wedge \frac{3}{2} \leq |z| \leq 5\right\}$ ist ein abgeschlossener Ringsektor von A mit Zentriwinkel von 60°.

(b) Sei $w \in e^{-i\frac{2\pi}{3}}S$ beliebig. Es existiert dann ein $z \in S$ mit $w = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$. Wegen $|z| \geq \frac{3}{2}$, ist $z \neq 0$. Betrachte seine Darstellung in Polarkoordinaten $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Nach Definition von $S_1 := S$ ist $-\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq -\frac{1}{3}\pi$. Dann gilt:

$$w = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}re^{\mathrm{i}\varphi} = re^{\mathrm{i}(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = re^{\mathrm{i}(\varphi - \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = re^{\mathrm{i}(\varphi + \frac{4\pi}{3})}$$

Also gilt $|w| = |z|$ und $\arg w = \arg z + \frac{4\pi}{3}$. D.h.: $S_3 := e^{-i\frac{2\pi}{3}}S$ ist der um 120° im Uhrzeigersinn gedrehte Ringsektor S_1. Entsprechend ist $S_2 := e^{i\frac{2\pi}{3}}S$ der um 120° gegen den Uhrzeigersinn gedrehte Ringsektor S_1. Eine Skizze von T ist in der Abbildung (1b) zu finden.



(a) Mengen B, A, C (b) Trefoil

Abbildung 1: Skizzen zur Aufgabe 44

□

Aufgabe 45:
Es gilt:

$$e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{\mathrm{i}\psi} = e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left(e^{\mathrm{i}\varphi - \frac{\varphi+\psi}{2}} - e^{\mathrm{i}\psi - \frac{\varphi+\psi}{2}}\right) = e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right) = 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Deshalb ist tatsächlich $\left|e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{\mathrm{i}\psi}\right| = \left|2e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$
Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$ für ein festes $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Klar $z \neq 0$. Nach Abschnitt 9.6 der Vorlesung hat $z = re^{\mathrm{i}\chi}$ eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten mit $r > 0$ und $\chi \in (-\pi, \pi]$. Wegen

$$1 = z^n \Rightarrow 1 = |z^n| = \left|r^n e^{\mathrm{i}n\chi}\right| = r^n$$

gilt $r = 1$. Ferner ist aus der Vorlesung bekannt, dass $r^n e^{\mathrm{i}n\chi} = 1$ genau dann, wenn $n\chi \in 2\pi\mathbb{Z}$, also $\chi \in \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$. Wegen $e^{\mathrm{i}\chi} = e^{\mathrm{i}(2\pi+\chi)}$, hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen

$$w_0 := 1 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 0}, w_1 := e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 1}, \ldots, w_{n-1} := e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)}$$

Es gilt nach Obigem:

$$|w_{k+1} - w_k| = \left|e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot(k+1)} - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot k}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|$$

Also bilden w_k mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ein regulären n-Eck mit Umfang:

$$L_n = |w_{n-1} - w_0| + \sum_{k=0}^{n-2} |w_{k+1} - w_k| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Nach Abschnitt 8.4 der Vorlesung gilt:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x\to 0} 2\pi\frac{\sin(x)}{x} = 2\pi$$

Das Ergebnis lässt sich wie folgt verstehen: Das von den w_k ($k \in \{0, \dots, n_1\}$) aufgespannte reguläre n-Eck approximiert immer besser den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Der Umfang der Rechtecke approximiert den Umfang der $\mathbb{S}^1$. Eine Skizze für $n = 6$ ist in der Abbildung (2) zu finden.
$\square$

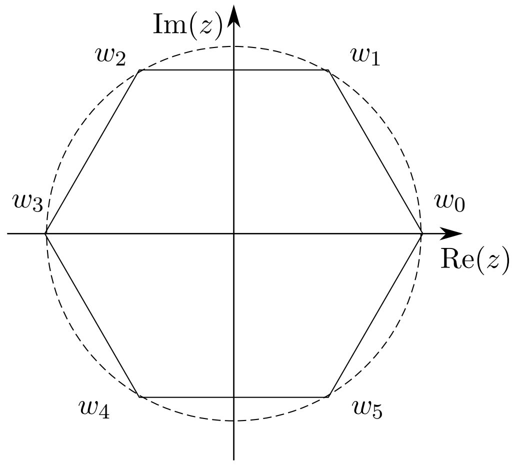


Abbildung 2: Sechste Einheitswurzeln

Aufgabe 46:

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} \cdot \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(y)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \end{aligned}$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$. Definiere $X := \arctan(x)$ und $Y := \arctan(y)$. Nach Voraussetzung ist also $X, Y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^c$. Nach Teilaufgabe (a) folgt dann:

$$\tan(X+Y) = \frac{\tan(X) + \tan(Y)}{1 - \tan(X)\tan(Y)}$$

Nach Abschnitt 9.5 der Vorlesung bildet tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab mit der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folglich ist $\arctan \circ \tan = \mathrm{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ und $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Die letzte Identität impliziert:

$$\begin{aligned} X + Y &= \arctan(\tan(X+Y)) = \arctan\left(\frac{\tan(X) + \tan(Y)}{1 - \tan(X)\tan(Y)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y))}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \end{aligned}$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt nach Definition:

$$\begin{aligned} (\cosh(x) + \sinh(x))^n &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{xn} \\ &= \left(\frac{e^{xn} + e^{-xn}}{2} + \frac{e^{xn} - e^{-xn}}{2}\right) = \cosh(xn) + \sinh(xn) \end{aligned}$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach Abschnitt 9.8 der Vorlesung ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Also existiert ein eindeutig bestimmtes $X \in \mathbb{R}$ mit $x = \sinh(X)$. Ferner ist nach Abschnitt 8.12 die Exponentialabbildung $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv mit log als Umkehrfunktion. Es ist also $\log \circ E = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Es gilt damit:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \operatorname{arsinh}(\sinh(X)) = X = \log(e^X) = \log\left(\frac{e^X - e^{-X}}{2} + \frac{e^X + e^{-X}}{2}\right)\\ &= \log\left(\sinh(X) + \cosh(X)\right)\end{aligned}$$

Mit der Identität $\cosh^2(X) - \sinh^2(X) = 1$ sowie der Tatsache $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Abschnitt 9.7 der Vorlesung, folgt weiter:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \log\left(\sinh(X) + \cosh(X)\right) = \log\left(\sinh(X) + \sqrt{\cosh^2(X)}\right)\\ &= \log\left(\sinh(X) + \sqrt{1 + \sinh^2(X)}\right) = \log\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)\end{aligned}$$

(e) Sei $x \in (-1, 1)$. Nach Abschnitt 9.8 der Vorlesung ist $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv mit artanh als Umkehrfunktion. Sei also $X := \operatorname{artanh}(x)$ bzw. $\tanh(X) = x$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tanh(X)}{1-\tanh(X)}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}{1-\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cosh(X)+\sinh(X)}{\cosh(X)-\sinh(X)}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{e^X+e^{-X}}{2} + \frac{e^X-e^{-X}}{2}}{\frac{e^X+e^{-X}}{2} - \frac{e^X-e^{-X}}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^X}{e^{-X}}\right) = \frac{1}{2}\log(e^{2X}) = X = \operatorname{artanh}(x)\end{aligned}$$

□