Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
10.01.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 47:

(a) Nach Abschnitt 10.4 der Vorlesung ist log differenzierbar und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel aus Abschnitt 10.3 der Vorlesung:

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \qquad \forall x > 1$$

(b) Mit der bereits zitierten Kettenregel gilt $[\exp \circ \sin]' = \sin' \cdot (\exp' \circ \sin) = \cos \cdot (\exp \circ \sin)$. Sei ferner $\mathrm{m} : \mathbb{R} \to R$ definiert durch $\mathrm{m}(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt wieder mit der Kettenregel $(\cos \circ \mathrm{m})' = (\cos' \circ \mathrm{m}) \cdot \mathrm{m}' = -2\,(\sin \circ \mathrm{m})$. Mit der Produktregel (2) aus dem Abschnitt 10.2 der Vorlesung folgt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= [(\cos \circ \mathrm{m}) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ \mathrm{m})'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ \mathrm{m})(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2\sin(2x) e^{\sin(x)} + \cos(2x)\cos(x) e^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(2x))\, e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

(c) Nach Abschnitt 10.3 der Vorlesung ist die Abbildung $\mathrm{T} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathrm{T}(x) = \sqrt[3]{x}$ differenzierbar und es gilt $\mathrm{T}'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$ für alle $x > 0$. Wegen $x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\log x \sqrt[3]{x}} = \exp \circ (\log \cdot \mathrm{T})(x)$ für alle $x > 0$, folgt mit der bereits zitierten Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [\exp \circ (\log \cdot \mathrm{T})]'(x) = \big(\exp' \circ (\log \cdot \mathrm{T})\big)(x) \cdot (\log \cdot \mathrm{T})'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \cdot \mathrm{T}))(x) \cdot \big(\log' \cdot \mathrm{T} + \log \cdot \mathrm{T}'\big)(x) \\ &= e^{\log x \sqrt[3]{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \sqrt[3]{x} + \log(x) \frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} \right) \\ &= \frac{x^{\sqrt[3]{x}}}{(\sqrt[3]{x})^2} \cdot \left(1 + \frac{\log(x)}{3} \right) \qquad \forall x > 0 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 48:

(a) Aus Abschnitt 10.1 der Vorlesung ist bekannt, dass cosh differenzierbar ist und $\cosh' = \sinh$ gilt. Nach Abschnitt 10.3 der Vorlesung ist die Abbildung $\mathrm{T} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$\mathrm{T}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ differenzierbar und es gilt $\mathrm{T}'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{x})^3}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel aus Abschnitt 10.3 der Vorlesung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (T \circ \cosh)'(x) \\ &= \big(T' \circ \cosh\big)(x) \cdot \cosh'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{\cosh(x)}\right)^3} \right) \cdot \sinh(x) \\ &= -\frac{\sinh(x)}{2\left(\sqrt{\cosh(x)}\right)^3} \end{aligned}$$

(b) Aus Abschnitt 10.4 der Vorlesung ist bekannt, dass Artanh differenzierbar ist und $\mathrm{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ für alle $x \in (-1,1)$ gilt. Ferner folgt aus Abschnitt 10.1 der Vorlesung, dass die Funktion $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch $\mathrm{P}(x) = 1 - x^2$ definiert ist, differenzierbar ist und $\mathrm{P}'(x) = -2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Mit der Produktregel folgt:

$$g'(x) = (\mathrm{T} \cdot \mathrm{Artanh})'(x) = \big(\mathrm{T}' \cdot \mathrm{Artanh} + \mathrm{T} \cdot \mathrm{Artanh}'\big)(x) = 1 - 2x\,\mathrm{Artanh}(x) \qquad \forall x \in (-1,1)$$

(c) Sei $\mathrm{P}_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathrm{P}_1(x) = x^{\sin(x)} = e^{\log(x)\sin(x)}$ für alle $x \in (-1,1)$ und $\mathrm{P}_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathrm{P}_2(x) = \sin(x)^x = e^{\log(\sin(x))x}$ für alle $x \in (-1,1)$. Mit den bereits zitierten Ketten- und Produktregeln folgt, dass T_1 und T_2 differenzierbar sind und für ihre Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} {\mathrm{P}_1}'(x) &= (\exp \circ (\log \cdot \sin))'(x) = \big(\exp' \circ (\log \cdot \sin)\big)(x) \cdot (\log \cdot \sin)'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \cdot \sin))(x) \cdot \big(\log' \cdot \sin + \log \cdot \sin'\big)(x) \\ &= x^{\sin(x)} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x} + \log(x)\cos(x) \right) \qquad \forall x \in (-1,1) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} {\mathrm{P}_2}'(x) &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \mathrm{id}))'(x) = \big(\exp' \circ (\log \circ \sin \cdot \mathrm{id})\big)(x) \cdot (\log \circ \sin \cdot \mathrm{id})'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \mathrm{id}))(x) \cdot ((\log \circ \sin)' \cdot \mathrm{id} + (\log \circ \sin) \cdot \mathrm{id}')(x) \\ &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \mathrm{id}))(x) \cdot ((\log' \circ \sin \cdot \sin') \cdot \mathrm{id} + (\log \circ \sin))(x) \\ &= \sin(x)^x \left(\frac{x\cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x)) \right) \qquad \forall x \in (-1,1). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2]'(x) = {\mathrm{P}_1}'(x)\,\mathrm{P}_2(x) + \mathrm{P}_1(x)\,{\mathrm{P}_2}'(x) \\ &= x^{\sin(x)} \sin(x)^x \left(\frac{\sin(x)}{x} + \log(x)\cos(x) + \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x)) \right) \qquad \forall x \in (-1,1) \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 49:
Klar ist: für alle $x < 0$ ist f differenzierbar in x und es gilt $f'(x) = 0$. Mit den bereits zitierten Rechenregeln gilt für alle $x > 0$, dass f differenzierbar in x ist und

$$f'(x) = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + 2\frac{1}{x^3}x^{\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}}\left[\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right] = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}}\left[\frac{5}{2}x^2 + 2\right].$$

Bei $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{h^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{h^2}} = \underbrace{\left(\lim_{h\to 0+} h^{\frac{3}{2}}\right)}_{=0} \cdot \left(\lim_{h\to 0+} e^{-\frac{1}{h^2}}\right) \\
&= 0 \cdot \lim_{h\to\infty} e^{-h^2} = 0 \cdot \lim_{h\to\infty} \frac{1}{e^{(h^2)}} = 0 \cdot \underbrace{\lim_{h\to\infty} \frac{1}{e^h}}_{\frac{1}{\infty}=0} = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

also

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0.$$

□

Aufgabe 50:

Für $x > 0$ gilt:

$$g(x) = x^2 \sin\left(e^{\frac{1}{|x|}} - \log(x^4)\right) = x^2 \sin\left(e^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right)$$

Ferner gilt mit den bereits zitierten Rechenregeln, dass g differenzierbar in x ist und

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x \sin\left(e^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right) + x^2 \cos\left(e^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right)\left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{4}{x}\right) \\
&= 2x \sin\left(e^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right) - \cos\left(e^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right)\left(e^{\frac{1}{x}} + 4x\right).
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^2 \sin\left(e^{\frac{1}{|x|}} - \log(x^4)\right) = x^2 \sin\left(e^{-\frac{1}{x}} - \log(|x|^4)\right) = x^2 \sin\left(e^{-\frac{1}{x}} - 4\log(|x|)\right) \\
&= x^2 \sin\left(e^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right)
\end{aligned}$$

Ferner gilt mit den bereits zitierten Rechenregeln, dass g differenzierbar in x ist und

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x \sin\left(e^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right) + x^2 \cos\left(e^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right)\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{4}{x}\right) \\
&= 2x \sin\left(e^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right) - \cos\left(e^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right)\left(4x - e^{-\frac{1}{x}}\right).
\end{aligned}$$

Bei $x = 0$ gilt für alle $h \neq 0$:

$$\left|\frac{f(h) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{h}\right| = \left|\frac{h^2 \sin\left(e^{\frac{1}{|h|}} - \log(h^4)\right)}{h}\right| = |h| \underbrace{\left|\sin\left(e^{\frac{1}{|h|}} - \log(h^4)\right)\right|}_{\leq 1} \leq |h| \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

Folglich ist g bei $x = 0$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$$

□

Aufgabe 51:

(a) Die Funktionen $f_1, f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \log(x^2+3) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \log(x)$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$. Ferner ist $f_2'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ für alle $x > 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 10.11 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\log(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2 \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}}}_{=1} = 2 \end{aligned}$$

(b) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = 1 + \cos(\pi x) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x^2 - 2x + 1$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = -\pi\sin(\pi x)$ und $f_2'(x) = 2x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $f_2'(x) \neq 0$ für alle $x \neq 1$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 10.11 der Vorlesung):

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{2x-2}$$

Nun sind die Funktionen $f_1', f_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, es gilt $\lim_{x\to 1} f_1'(x) = \lim_{x\to 1} f_2'(x) = 0$ sowie $f_1''(x) = -\pi^2\cos(\pi x)$ und $f_2''(x) = 2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich kann die Regel von l'Hospital erneut angewandt werden und es folgt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

(c) Sei $x \geq 1$. Dann ist sin auf $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ stetig und auf $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwert der Differentialrechnung (MWS) (vgl. Abschnitt 10.7 der Vorlesung) existiert dann ein $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ mit

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -\left(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= -\cos(\xi_x)\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = -\cos(\xi_x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\left|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right| = \underbrace{|-\cos(\xi_x)|}_{\leq 1} \left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Deswegen gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right) = 0$$

□

Aufgabe 52:

(a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\pi} f_1(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \cos(\sin(x))\cos(x)$ und $f_2'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 10.11 der Vorlesung):

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{1} = -1$$

(b) Die Funktionen $f_1, f_2 : (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \log(\cos(3x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \log(\cos(2x))$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)} = -3\tan(3x)$ und $f_2'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x)$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. Für alle $x \neq 0$ gilt $f_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 10.11 der Vorlesung):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\tan(3x)}{-2\tan(2x)} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(2x)}$$

Nun sind die Funktionen $g_1, g_2 : (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(x) = \tan(3x) \qquad \text{und} \qquad g_2(x) = \tan(2x)$$

differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to 0} g_1(x) = \lim_{x\to 0} g_2(x) = 0$. Ferner ist $g_1'(x) = 3(1 + \tan^2(3x))$ und $g_2'(x) = 2(1 + \tan(2x))$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. Für alle $x \neq 0$ gilt $g_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 10.11 der Vorlesung):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3(1+\tan^2(3x))}{2(1+\tan^2(2x))} = \frac{3}{2}$$

Es ergibt sich insgesamt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))} = \frac{9}{4}$$

(c) Sei $x \geq 1$. Dann ist log auf $[x, 1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwert der Differentialrechnung (MWS) (vgl. Abschnitt 10.7 der Vorlesung) existiert dann ein $\xi_x \in (x, 1+\sqrt{1+x^2})$ mit:

$$\begin{aligned} x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\ &= \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{wegen} \qquad x < \xi_x < 1+\sqrt{1+x^2}$$

und damit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ als Folgerung aus dem Einschnürungssatz. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□