Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
09.01.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 53:

(a) Sei $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = -6x + (|x-3| + 2)^2$ für alle $x \in [0, 10]$ definiert. Begründen Sie, dass f ihr Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

(b) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die durch

$$\sum_{j=1}^{n} (a - a_j)^2 = \min \left\{ \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 \, : \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a.

Aufgabe 54:

(a) Sei $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3, 2]$ definiert. Begründen Sie, dass f ihr Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

(b) Für eine physikalische Größe werden bei $2m+1$ Messungen mit $m \in \mathbb{N}_0$ die Messwerte $a_1, \dots, a_{2m+1} \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man, alternativ zur Aufgabe 53 (b), die Zahl a an, die durch

$$\sum_{j=1}^{2m+1} |a - a_j| = \min \left\{ \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k| \, : \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert wird. Begründen Sie, warum a eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie a.

Aufgabe 55:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = e^x + x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle $x^* \in [-1, 0]$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit einem Startwert $x_0 \geq 0$ konvergiert und führen Sie für $x_0 = 0$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens durch.

(c) Wieviele Iterationen des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ sind höchstens notwendig, um eine (absolute) Genauigkeit von 10^{-4} zu erreichen?

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 56:
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass g genau eine Nullstelle $x^* \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit einem Startwert $x_0 \geq 2$ konvergiert und führen Sie für $x_0 = 2$ einen Schritt des Newton-Verfahrens durch.

(c) Wieviele Iterationen des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 2$ sind höchstens notwendig, um eine (absolute) Genauigkeit von 10^{-4} zu erreichen?

Aufgabe 57:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

(b) Die Funktion $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \log(1 + x)$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_0^4 g$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_0^4 g(x) \leq \frac{1}{5} x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 58:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

(b) Die Funktion $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{\frac{1}{2}}^2$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g(x) - T_{\frac{1}{2}}^2(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 53, 55 und 57 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.

Übungsklausur:

- Die Übungsklausur findet am *Samstag, den 1. Februar 2014*, von *8:00 bis 10:00* statt.
- *Falls Sie einen Übungsschein benötigen (z.B. Lehramt Physik ohne Mathematik):* Sie können einen Übungsschein durch die erfolgreiche Teilnahme an der Übungsklausur erwerben. Bitte melden Sie sich dazu bis zum *28.01.14* im Sekretariat bei Frau Dr. Nagato-Plum an. Bei der Anmeldung erfahren Sie Ihren Sitzplatz für die Übungsklausur.
- *Falls Sie keinen Übungsschein benötigen:* Eine Anmeldung ist in diesem Fall nicht erforderlich. Teilnehmer mit Anfangsbuchstaben des Nachnamens A bis K schreiben die Klausur im Hörsaal 37; Teilnehmer mit Anfangsbuchstaben des Nachnamens L bis Z schreiben die Klausur im Hörsaal Neue Chemie.
- Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Homepage.