Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
17.01.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 53:

(a) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [0, 10]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 8.15 der Vorlesung nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Nach Definition 10.5 der Vorlesung sind x_m und x_M lokale Extrema.

Seien $I_1 := (0, 3)$, $I_2 := (3, 10)$. Für alle $x \in I_1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3|+2)^2 \overset{x \leq 3}{=} -6x + (3-x+2)^2 = -6x + (5-x)^2 = -6x + x^2 - 10x + 25 \\ &= x^2 - 16x + 25 \end{aligned}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3|+2)^2 \overset{x \geq 3}{=} -6x + (x-3+2)^2 = -6x + (x-1)^2 = -6x + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

Mit diesen Darstellungen ist klar, dass f auf I_1 und I_2 differenzierbar ist und

$$f'(x) = 2x - 16 \quad \forall x \in I_1 \qquad \text{sowie} \qquad f'(x) = 2x - 8 \quad \forall x \in I_2.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$. Ist $x_0 \in I_1 \cup I_2$, so gilt nach Satz 10.6, dass $f'(x_0) = 0$ ist. Für alle $x \in I_1$ gilt:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \overset{8 \notin I_1}{\Leftrightarrow} \text{falsch}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt hingegen:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} f(0) &= -6 \cdot 0 + ((3-0)+2)^2 = 5^2 = 25 \\ f(3) &= -6 \cdot 3 + ((3-3)+2)^2 = -18 + 2^2 = -12 \\ f(4) &= -6 \cdot 4 + ((4-3)+2)^2 = -24 + 9 = -15 \\ f(10) &= -6 \cdot 10 + ((10-3)+2)^2 = -60 + 81 = 21 \end{aligned}$$

Wegen $x_0 \in I = \{0, 3, 10\} \cup I_1 \cup I_2$ folgt:

$$x_m = 4,\ f(x_m) = -15 = \min\{f(x) : x \in I\} \qquad x_M = 0,\ f(x_M) = 25 = \max\{f(x) : x \in I\}$$

(b) Definiere hilfsweise die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Klar: g ist differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{m=1}^{n} a_m \right) = 2nx - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k = 2n \left(x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ = 0 & \text{für } x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ < 0 & \text{für } x < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases} .$$

Nach Abschnitt 10.8 der Vorlesung ist g auf $(-\infty, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k]$ monoton fallend und auf $[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k, \infty)$ monoton wachsend. Das bedeutet: Ist $x \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $g(x) \geq g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k)$; ist $x \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k) \leq g(x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $g(x) \geq g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Angenommen, es gibt ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $g(b) = g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k)$. O.B.d.A. ist $b > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 10.7 der Vorlesung, existiert ein $\xi \in (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Nach obiger Rechnung ist aber $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ die einzige Nullstelle von g'.

Also muss die Annahme verworfen werden und $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist die gesuchte eindeutige Stelle des globalen Minimums von g.

□

Aufgabe 54:

(a) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [-3, 2]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 8.15 der Vorlesung nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Nach Definition 10.5 der Vorlesung sind x_m und x_M lokale Extrema.

Sei $\mathring{I} := (-3, 2)$. Es ist klar, dass f auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \quad \forall x \in \mathring{I}.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$. Ist $x_0 \in \mathring{I}$, so gilt nach Satz 10.6, dass $f'(x_0) = 0$ ist. Für alle $x \in \mathring{I}$ gilt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 = 81 - 4 \cdot 9 + 2 = 47 \\ f\left(-\sqrt{2}\right) &= f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 4 - 4 \cdot 2 + 2 = -2 \\ f(0) &= 2 \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Wegen $x_0 \in I = \{-3, 2\} \cup \mathring{I}$ folgt:

$$x_m \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\},\ f(x_m) = -2 = \min\{f(x) : x \in I\} \qquad x_M = -3,\ f(x_M) = 47 = \max\{f(x) : x \in I\}$$

(b) Gelte O.B.d.A. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2m+1}$. Seien für $j \in \{1, \dots, 2m\}$ die Intervalle $I_j := [a_j, a_{j+1}]$ und $\mathring{I}_j = (a_j, a_{j+1})$ definiert. Hilfsweise sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt. Klar: g ist stetig. Ferner gilt für jedes $j \in \{1, \dots, 2m\}$ und jedes $x \in I_j$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} \left| \underbrace{x}_{\geq a_j \geq a_k} - a_k \right| + \sum_{k=j+1}^{2m+1} \left| \underbrace{x}_{\leq a_{j+1} \leq a_k} - a_k \right| = \sum_{k=1}^{j} (x - a_k) + \sum_{k=j+1}^{2m+1} (a_k - x)$$

Folglich ist g auf jedem $\mathring{I}_j$ differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{j} 1 - \sum_{k=j+1}^{2m+1} 1 = j - ((2m+1) - (j+1) + 1) = 2j - (2m+1) \begin{cases} < 0 & \text{für } j \leq m \\ > 0 & \text{für } j > m \end{cases}$$

für alle $x \in \mathring{I}_j$. Wir definieren noch $I_0 := (-\infty, a_1]$, $\mathring{I}_0 = (-\infty, a_1)$ sowie $I_{2m+1} := [a_{2m+1}, \infty)$, $\mathring{I}_{2m+1} = (a_{2m+1}, \infty)$. Wie oben sieht man ein, dass g auf $\mathring{I}_0$ und $\mathring{I}_{2m+1}$ differenzierbar ist und

$$g'(x) = -(2m+1) < 0\, \forall x \in \mathring{I}_0 \qquad \text{sowie} \qquad g'(x) = 2m+1 > 0\, \forall x \in \mathring{I}_{2m+1}$$

gilt. Mit Abschnitt 10.8 der Vorlesung ergibt sich, dass g auf den Intervallen $I_0, \dots, I_m$ streng monoton fallend ist und auf den Intervallen $I_{m+1}, \dots, I_{2m+1}$ streng monoton wachsend ist. Insbesondere ist $g(a_1) \geq g(a_2) \geq \cdots \geq g(a_{m+1})$ und $g(a_{m+1}) \leq g(a_{m+2}) \leq \cdots \leq g(a_{2m+1})$.

Sei nun $x < a_{m+1}$. Dann ist $x \in I_j$ für ein $j \in \{0, \dots, m\}$. O.B.d.A. ist j maximal, also $x \notin I_{j+1}$. Insbesondere ist $x \neq a_{j+1}$, also $x < a_{j+1}$. Mit der strengen Monotonie und der Ungleichungskette von Oben folgt dann:

$$g(x) > g(a_{j+1}) \geq g(a_{m+1})$$

Sei nun $x > a_{m+1}$. Dann ist $x \in I_j$ für ein $j \in \{m+1, \dots, 2m+1\}$. O.B.d.A. ist j minimal, also $x \notin I_{j-1}$. Insbesondere ist $x \neq a_j$, also $x > a_j$. Mit der strengen Monotonie und der Ungleichungskette von Oben folgt dann:

$$g(x) > g(a_j) \geq g(a_{m+1})$$

Insgesamt gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a_{m+1}$

$$g(x) > g(a_{m+1})$$

und damit ist $a = a_{m+1}$ die gesuchte eindeutige Stelle des globalen Minimums von g.

□

Zur Bearbeitung der nächsten zwei Aufgaben benötigen wir noch das folgende

Lemma. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, $x^* \in \mathbb{R}$ und $C > 0$. Es gelte*

$$|x_k - x^*| \le C \cdot |x_{k-1} - x^*|^2$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{C}\left(C \cdot |x_0 - x^*|\right)^{(2^k)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis (Induktion über k):

- *IA* ($k = 1$): Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned}|x_1 - x^*| &\le C \cdot |x_0 - x^*|^2 = \frac{1}{C}\cdot C^2\,|x_0 - x^*|^2 = \frac{1}{C}\cdot (C\,|x_0 - x^*|)^2 \\ &= \frac{1}{C}\cdot (C\,|x_0 - x^*|)^{(2^1)}\end{aligned}$$

- *IS*: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses k gelte (IV):

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{C}\left(C \cdot |x_k - x^*|\right)^{(2^k)}$$

  Dann gilt für $k+1$:

$$\begin{aligned}|x_{k+1} - x^*| &\le C \cdot |x_k - x^*|^2 \overset{\text{(IV)}}{\le} C \cdot \left(\frac{1}{C}\left(C \cdot |x_0 - x^*|\right)^{(2^k)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{C}\cdot \left(C \cdot |x_0 - x^*|\right)^{2(2^k)} = \frac{1}{C}\cdot \left(C \cdot |x_0 - x^*|\right)^{(2^{k+1})}\end{aligned}$$

□

Aufgabe 55:

(a) Klar: f ist differenzierbar und insbesondere stetig. Es gilt:

$$\begin{aligned}f(-1) &= e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 \le \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \\ f(0) &= e^0 = 1 > 0\end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz aus dem Abschnitt 8.9 der Vorlesung existiert ein $x^* \in [-1, 0]$ mit $f(x^*) = 0$. Ferner gilt:

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Damit ist f nach Abschnitt 10.8 der Vorlesung streng monoton wachsend und damit injektiv. Also ist x^* die einzige Nullstelle von f.

(b) Nach dem Satz über die Konvergenz des Newton-Verfahrens aus dem Abschnitt 10.9 der Vorlesung muss Folgendes sichergestellt sein:

- Für den Startwert x_0 muss $x_0 > x^*$ gelten. Tatsächlich ist $x^* < 0 \le x_0$ nach Teilaufgabe (a).
- $f'(x^*) > 0$. Tatsächlich ist sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach Teilaufgabe (a).

- f' ist auf $[x^*, x_0]$ monoton wachsend. Tatsächlich ist $f'(x) = e^x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Damit ist das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 \geq 0$ tatsächlich konvergent. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist der Schritt des Newton-Verfahrens durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

gegeben. Man berechnet daher:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{e^0 + 1} = -\frac{1}{2} \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{e^{-\frac{1}{2}} + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}} + 1} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\frac{\sqrt{e}}{2} - 1}{1 + \sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e} - 2 - 1 - \sqrt{e}}{2(1 + \sqrt{e})} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{e}}
\end{aligned}$$

(c) Aus Abschnitt 10.9 der Vorlesung ist über die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens Folgendes bekannt:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\,|x_{k+1} - x_k|^2$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist $C = \frac{\max_{x \in [x^*, x_0]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [x^*, x_0]} |f'(x)|}$. Ferner ist aus dem gleichen Abschnitt bekannt, dass $x^* \leq x_{k+1} \leq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir schätzen die Ausdrücke deshalb wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [x^*, x_0]} \left|f''(x)\right| &\leq \max_{x \in [-1, 0]} |e^x| = e^0 = 1 \\
\min_{x \in [x^*, x_0]} \left|f'(x)\right| &\geq \min_{x \in [-1, 0]} |e^x + 1| = \left|e^{(-1)} + 1\right| = \frac{1}{e} + 1 \geq \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\
C &= \frac{\max_{x \in [x^*, x_0]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [x^*, x_0]} |f'(x)|} \leq \frac{3}{8} \leq \frac{1}{2} =: \tilde{C} \\
|x_{k+1} - x_k| &= x_k - x_{k+1} \leq x_k - x^* = |x_k - x^*| \\
|x_1 - x^*| &= x_1 - x^* \leq -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} = \tilde{C}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\,|x_{k+1} - x_k|^2 \leq \tilde{C}\,|x_k - x^*|^2$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Setzen wir $y_k := x_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und wenden das obige Lemma auf $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\tilde{C}$ und x^* an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
|y_k - x^*| &= |x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{\tilde{C}} \left(\tilde{C}\,|y_0 - x^*|\right)^{(2^k)} = \frac{1}{\tilde{C}} \left(\tilde{C}\,|x_1 - x^*|\right)^{(2^k)} \leq \frac{1}{\tilde{C}} \left(\tilde{C}^2\right)^{(2^k)} \\
&= \tilde{C}^{2 \cdot 2^k - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1} - 1}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt für alle $k \geq 4$:

$$|x_k - x^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^4-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{32768} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

Also werden höchstens vier Iterationsschritte benötigt, um eine (absolute) Genauigkeit von 10^{-4} zu erreichen.

□

Aufgabe 56:

(a) Klar: g ist differenzierbar und insbesondere stetig. Es gilt:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27-18-12-8}{8} = -\frac{11}{8} < 0 \\ g(2) &= 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = 8 - 4 - 2 - 1 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz aus dem Abschnitt 8.9 der Vorlesung existiert ein $x^* \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ mit $g(x^*) = 0$. Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 3\left(x - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \\ &= 3(x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \begin{cases} < 0 & \text{für } -\frac{1}{3} < x < 1 \\ = 0 & \text{für } x \in \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\} \\ > 0 & \text{für } x > 1 \vee x < -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist g nach Abschnitt 10.8 der Vorlesung auf $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ streng monoton wachsend, auf $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ streng monoton fallend und auf $[1, \infty)$ wieder streng monoton wachsend. Deshalb ist x^* die einzige Nullstelle von g in $[1, \infty)$. Für $x \leq -\frac{1}{3}$ gilt mit der Monotonie

$$\begin{aligned} g(x) \leq g\left(-\frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{-1-3+9-27}{27} = -\frac{22}{27} < 0. \end{aligned}$$

Genauso gilt für $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

$$g(x) \leq g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{22}{27} < 0.$$

Damit hat g auf $(-\infty, 1]$ keine Nullstellen und somit ist x^* die einzige Nullstelle von g.

(b) Nach dem Satz über die Konvergenz des Newton-Verfahrens aus dem Abschnitt 10.9 der Vorlesung muss Folgendes sichergestellt sein:

- Für den Startwert x_0 muss $x_0 > x^*$ gelten. Tatsächlich ist $x^* < 2 \leq x_0$ nach Teilaufgabe (a).
- $g'(x^*) > 0$. Tatsächlich ist sogar $g'(x) > 0$ für alle $x > 1$ nach Teilaufgabe (a).
- g' ist auf $[x^*, x_0]$ monoton wachsend. Tatsächlich ist g' differenzierbar und es gilt $g''(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right) + 3(x-1) = 6x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $g''(x) > 0$ für alle $x > \frac{1}{3}$ und damit ist g' sogar auf $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ streng monoton wachsend.

Damit ist das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 \geq 2$ tatsächlich konvergent. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist der Schritt des Newton-Verfahrens durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$$

gegeben. Man berechnet daher:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2 - \frac{1}{3(2-1)\left(2+\frac{1}{3}\right)} = 2 - \frac{1}{7} = \frac{13}{7} \end{aligned}$$

(c) Aus Abschnitt 10.9 der Vorlesung ist über die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens Folgendes bekannt:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\,|x_{k+1} - x_k|^2$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist $C = \frac{\max_{x\in[x^*,x_0]}|g''(x)|}{2\min_{x\in[x^*,x_0]}|g'(x)|}$. Ferner ist aus dem gleichen Abschnitt bekannt, dass $x^* \leq x_{k+1} \leq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir schätzen die Ausdrücke deshalb wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \max_{x\in[x^*,x_0]} \left|g''(x)\right| &\leq \max_{x\in\left[\frac{3}{2},2\right]} |6x-2| = 12-2 = 10 \\ \min_{x\in[x^*,x_0]} \left|g'(x)\right| &\geq \min_{x\in\left[\frac{3}{2},2\right]} |(x-1)(3x+1)| = \left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{9}{2}+1\right) = \frac{11}{4} \\ C &= \frac{\max_{x\in[x^*,x_0]}|g''(x)|}{2\min_{x\in[x^*,x_0]}|g'(x)|} \leq \frac{20}{11} \leq 2 =: \tilde{C} \\ |x_{k+1} - x_k| &= x_k - x_{k+1} \leq x_k - x^* = |x_k - x^*| \\ |x_1 - x^*| &= x_1 - x^* \leq \frac{13}{7} - \frac{3}{2} = \frac{26-21}{14} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\,|x_{k+1} - x_k|^2 \leq \tilde{C}\,|x_k - x^*|^2$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Setzen wir $y_k := x_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und wenden das obige Lemma auf $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\tilde{C}$ und x^* an, so erhalten wir

$$|y_k - x^*| = |x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{\tilde{C}}\left(\tilde{C}\,|y_0 - x^*|\right)^{(2^k)} = \frac{1}{\tilde{C}}\left(\tilde{C}\,|x_1 - x^*|\right)^{(2^k)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{(2^k)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt für alle $k \geq 6$:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{(2^{k-1})} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{(2^5)} \approx 0,000011 < 10^{-4}$$

Also werden höchstens sechs Iterationsschritte benötigt, um eine (absolute) Genauigkeit von 10^{-4} zu erreichen.

□

Aufgabe 57:

(a) Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$\frac{1}{x^2-2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \rho.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n)x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \rho
\end{aligned}$$

Sowohl die linke als die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Funktionswert einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion. Beide Reihen haben mindestens den Konvergenzradius $\rho > 0$. Wir dürfen also den Identitätssatz für Potenzreihen aus dem Abschnitt 10.17 der Vorlesung verwenden (Koeffizientenvergleich) und schließen:

$$a_0 = 1, \quad a_1 - 2a_0 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0$$

Berechnen der ersten Werte liefert:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 2a_0 = 2 \\
a_2 &= 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3 \\
a_3 &= 2a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4 \\
a_4 &= 2a_3 - a_2 = 8 - 3 = 5
\end{aligned}$$

Das legt die Vermutung $a_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n:

IA $(n = 0)$: klar

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n = n+1$. Dann gilt für $n+1$ Folgendes: Ist $n = 0$, so ist $a_{n+1} = a_1 = 2 = (n+1)+1$. Ist $n \geq 1$, so gilt:

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{=} 2(n+1) - (n-1+1) = n+2 = (n+1)+1$$

Dies schließt den Beweis der Vermutung ab. Als Letztes müssen wir nur sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe tatsächlich einen positiven Konvergenzradius hat. Die Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 der Vorlesung) liefert sofort:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1 > 0$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt also:

$$\frac{1}{x^2-2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

(b) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \log(1+x) \\ g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x} \\ g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ g^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ g^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \\ g^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5} \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_0^4 g$ ist laut Abschnitt 10.14 der Vorlesung durch

$$T_0^4 g(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \log(1) + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

für alle $x \in (-1, \infty)$ gegeben.

Sei nun $x \geq 0$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $\xi \in (0, x)$ derart, dass

$$g(x) - T_0^4 g(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\xi)^5}$$

gilt. Wegen $0 < \frac{1}{(1+\xi)^5} < 1$ folgt wie gefordert:

$$0 \leq g(x) - T_0^4 g(x) \leq \frac{1}{5} x^5$$

□

Aufgabe 58:

(a) Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x+1| < \rho.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \left(x^2 + 2x - 3 \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \left((x+1)^2 - 1 - 3 \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \left((x+1)^2 - 4 \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} \right) - 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^n \right) - 4 \left(a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} : |x+1| < \rho \end{aligned}$$

Sowohl die linke als die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Funktionswert einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion. Beide Reihen haben mindestens den Konvergenzradius $\rho > 0$. Wir dürfen also den Identitätssatz für Potenzreihen aus dem Abschnitt 10.17 der Vorlesung verwenden (Koeffizientenvergleich) und schließen:

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0$$

Damit ergibt sich induktiv:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4} \\
a_1 &= 0 \\
a_{2n} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\
a_{2n+1} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0
\end{aligned}$$

Als Letztes müssen wir nur sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe tatsächlich einen positiven Konvergenzradius hat. Die Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 der Vorlesung) liefert sofort:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < 2$ gilt also:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} (x+1)^{2n}$$

(b) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x} \\
g^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\
g^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3} \\
g^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T^2_{\frac{1}{2}} g$ ist laut Abschnitt 10.14 der Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
T^2_{\frac{1}{2}} g(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-1, \infty)$ gegeben.

Sei nun $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ derart, dass

$$g(x) - T^2_{\frac{1}{2}} g(x) = \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{e}} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

gilt. Wegen $0 < \xi$ und damit

$$\left|g^{(3)}(\xi)\right| = \left|-e^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}\right| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \overset{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7$$

folgt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert

$$\left|g(x) - T^2_{\frac{1}{2} g(x)}\right| \leq C \left|x - \frac{1}{2}\right|^3$$

für alle $x \in [0,1]$.

□