Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
24.01.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 59:
Wir halten zunächst fest, dass jeder angegebene Integrand auf dem jeweiligen abgeschlossenen Integrationsintervall stetig ist und die Integrale deswegen definiert sind.

(a) Nach Abschnitt 11.3 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt:

$$\int_{-2}^{2} |t-1|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{1} |t-1|\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} |t-1|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{1}(1-t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{2}(t-1)\mathrm{d}t$$

Nach Abschnitt 11.5 der Vorlesung (Integrale über Polynome) gilt:

$$\int_{-2}^{1}(1-t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{2}(t-1)\mathrm{d}t = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{t=-2}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_{t=1}^{t=2} = 5$$

(b) Wähle $a = 1$, $b = 4$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}$ für alle $t \in I := [a,b]$ sowie $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $\phi(t) = t^2$ für alle $t \in J := [\alpha, \beta]$. Klar: $\phi \in C^1(J)$, $\phi'(t) = 2t0$ für alle $t \in J$. Nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 11.7 der Vorlesung gilt:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1-\sqrt{t})}\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(s))\phi'(s)\mathrm{d}s = \int_1^2 \frac{2s}{s(1+s)}\mathrm{d}s = 2\int_1^2 \frac{1}{1+s}\mathrm{d}s$$

Weitere Substitution $x = 1+s$ liefert:

$$2\int_1^2 \frac{1}{1+s}\mathrm{d}s = 2\int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Nach Abschnitt 11.5 der Vorlesung ist schließlich:

$$2\int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\left[\log(x)\right]_{x=2}^{x=3} = 2(\log(3)-\log(2)) = 2\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

(c) Wähle $u(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$ sowie $v(t) = \frac{1}{2}t^2$ für alle $t \in I := [0, \frac{\pi}{2}]$. Klar: $u, v \in C^1(I)$ und $u'(t) = \sin(2t)$ für alle $t \in I$. Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 11.6 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t^2\sin(2t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\left[\frac{1}{2}\cos(2t)\cdot\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(2t)t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos(2t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Auf das verbleibende Integral wird wieder die Regel der partiellen Integration angewendet. Es folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\cos(2t)}_{=v'(t)} \mathrm{d}t = \left[t \cdot \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \frac{1}{2}\sin(2t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t$$

Eine Stammfunktion zu $t \mapsto \sin(2t)$ ist $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2t)$. Nach dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung gilt daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

Daher gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t^2 \sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

(d) Als Erstes wird $s = \sqrt{t}$, d.h. $t = s^2$ substituiert. Es folgt $\mathrm{d}t = 2s\mathrm{d}s$ und wegen $t \in [1,4]$ ist $s \in [1,2]$. Es ergibt sich:

$$\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right)\mathrm{d}t = \int_1^2 2s \cdot \arctan\left(\sqrt{s-1}\right)\mathrm{d}s$$

Nun wird $x = \sqrt{s-1}$, d.h. $s = x^2+1$ substituiert. Es folgt $\mathrm{d}s = 2x\mathrm{d}x$ und wegen $s \in [1,2]$ ist $x \in [0,1]$. Damit:

$$\int_1^2 2s \cdot \arctan\left(\sqrt{s-1}\right)\mathrm{d}s = \int_0^1 2(x^2+1) \cdot 2x \cdot \arctan(x)\mathrm{d}x$$

Dieses Integral können wir weiter mit der Regel der partiellen Integration bearbeiten, dabei sei $u(x) = x^4 + 2x^2$ bzw. $v(x) = \arctan(x)$ für alle $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{4(x^3+x)}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{=v(x)} \mathrm{d}x &= \left[(x^4+2x^2)\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x^4+2x^2)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= 3\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\pi + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 1+x^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\pi + \left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \left[x + \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \pi - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 60:

Wir halten zunächst fest, dass jeder angegebene Integrand auf dem jeweiligen abgeschlossenen Integrationsintervall stetig ist und die Integrale deswegen definiert sind.

(a) Aus Abschnitt 9.2 der Vorlesung ist bekannt, dass $\pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellenmenge vom sin ist. Mit dem Zwischenwertsatz aus Abschnitt 8.9 der Vorlesung folgt: $\sin(t) \geq 0$ für alle $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$ oder $\sin(t) \leq 0$ für alle $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$. Im ersten Fall gilt nach Abschnitt 11.3 der Vorlesung $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t \geq 0$ und damit $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t =$

$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t\right|$. Entsprechend gilt im zweiten Fall $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t \leq 0$ und damit $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} -\sin(t)\mathrm{d}t = -\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t\right|$. Da $-\cos$ eine Stammfunktion von sin ist, folgt mit den Eigenschaften des cos aus Abschnitt 9.2 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t &= \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\mathrm{d}t\right| = \left|-\left[\cos(t)\right]_{t=(k-1)\pi}^{t=k\pi}\right| \\
&= \left|(-1)^k - (-1)^{(k-1)}\right| = \left|(-1)^k + (-1)^k\right| = 2
\end{aligned}$$

(b) Betrachte die Substitution $s = \log(t)$, d.h. $t = e^s$. Dann ist $\mathrm{d}t = e^s\mathrm{d}s$ und wegen $t \in [1, e]$ ist $s \in [0, 1]$. Es folgt:

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+\log(t))}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^s}{e^s(1+s)}\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{1}{(1+s)}\mathrm{d}s$$

Eine Stammfunktion des letzten Integranden ist $s \mapsto \log(1+s)$. Nach dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung gilt daher:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+s)}\mathrm{d}s = \left[\log(1+s)\right]_{s=0}^{s=1} = \log(2) - \log(1) = \log(2)$$

(c) Wir wenden die Regel der partiellen Integration mit $u(t) = t$ und $v(t) = \arcsin(t)$ für $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\arcsin(t)}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t = \left[t\arcsin(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion des letzten Integranden ist $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

(d) Zunächst beachten wir, dass nach den Additionstheoremen aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung

$$\sin(t) = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da weder $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$ noch $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ Nullstellen im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ haben, gilt für alle $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$:

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{2\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Es bietet sich daher die Substitution $s = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, d.h $t = 2\arctan(s)$ an. Dann ist $\mathrm{d}t = \frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s$ und wegen $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ist $s \in \left[1, \sqrt{3}\right]$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+s^2}{2s} \cdot \frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = [\log(s)]_{s=1}^{s=\sqrt{3}} = \frac{\log(3)}{2}\end{aligned}$$

□

Aufgabe 61:

Wir halten zunächst fest, dass jeder angegebene Integrand auf dem jeweiligen abgeschlossenen Integrationsintervall stetig ist und die Integrale deswegen definiert sind.

(a) Betrachte die Substitution $s = 1 + 2t$, d.h. $t = \frac{s-1}{2}$. Dann ist $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{2}$ und wegen $t \in [0, 1]$ ist $s \in [1, 3]$. Es folgt:

$$\int_0^1 (1+2t)^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^3 s^3 \mathrm{d}s$$

Eine Stammfunktion des letzten Integranden ist $s \mapsto \frac{1}{4}s^4$. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\frac{1}{2}\int_1^3 s^3 \mathrm{d}s = \frac{1}{8}\left[s^4\right]_{s=1}^{s=3} = \frac{81-1}{8} = 10$$

(b) Wir wenden die Regel der partiellen Integration mit $u(t) = \frac{t^2}{2}$ und $v(t) = \log(t)$ für $t \in [1, e]$ an und erhalten:

$$\int_1^e \underbrace{t}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\log(t)}_{=v(t)} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\log(t)\right]_{t=1}^{t=e} - \int_1^e \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e t\mathrm{d}t$$

Eine Stammfunktion des letzten Integranden ist $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\int_1^e t\log(t)\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_{t=1}^{t=e} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

(c) Scharfes Hinsehen liefert, dass $t \mapsto u(t) := \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto u'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist. Daher bietet es sich an, die Regel der Partiellen Integration mit $u(t)$ wie oben und $v(t) = t^2$ für alle $t \in [1, 2]$ anzuwenden:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t &= \int_1^2 \underbrace{\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{u'(t)=} \cdot \underbrace{t^2}_{=v(t)} \mathrm{d}t = \left[\frac{-t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 \frac{-2t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{5}} + 2\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ein weiteres scharfes Hinsehen liefert, dass $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ eine Stammfunktion des letzten Integranden ist. Damit folgt:

$$\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2\left[\sqrt{1+t^2}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(d) Mit der Definition von cosh und sinh ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{(e^t-e^{-t})\cdot(e^t+e^{-t})}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Es bietet sich daher die Substitution $s = e^{2t}$, d.h. $t = \frac{\log(s)}{2}$ an. Dann ist $\mathrm{d}t = \frac{1}{2s}\mathrm{d}s$ und wegen $t \in \left[\frac{\log(3)}{2}, \frac{\log(7)}{2}\right]$ ist $s \in [3,7]$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}}\mathrm{d}t &= 2\int_3^7 \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{s}}\mathrm{d}s = 2\int_3^7 \frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}s = \int_3^7 \frac{2}{(s-1)(s+1)}\mathrm{d}s \\ &= \int_3^7 \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\mathrm{d}s = [\log(s-1)-\log(s+1)]_{s=3}^{s=7} = \left[\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_{s=3}^{s=7} \\ &= \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log(2) = \log\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

□

Aufgabe 62:

Wir halten zunächst fest, dass jeder angegebene Integrand auf dem jeweiligen abgeschlossenen Integrationsintervall stetig ist und die Integrale deswegen definiert sind.

(a) Scharfes Hinsehen liefert, dass $t \mapsto -\frac{1}{4}\sqrt{9-4t^2}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}$ ist. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}\mathrm{d}t = -\left[\frac{\sqrt{9-4t^2}}{4}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

(b) Wir wenden die Regel der partiellen Integration mit $u(t) = \sin(t)$ und $v(t) = t$ für $t \in \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$ an und erhalten:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{t}_{=v(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=u'(t)}\,\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\mathrm{d}t$$

Eine Stammfunktion des letzten Integranden ist $t \mapsto -\cos(t)$. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + [\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)-8}{8}$$

(c) Mit der Linearität des Integrals (siehe Abschnitt 11.3 der Vorlesung) gilt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)+1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\sqrt{1-t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$$

Eine Stammfunktion von $t \mapsto -\sqrt{1-t}$ ist $t \mapsto \frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}$. Eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ ist $t \mapsto -2\sqrt{1-t}$. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} -\sqrt{1-t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t &= \frac{2}{3}\left[(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} - 2\left[\sqrt{1-t}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 2 - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} + \frac{12}{6} - \frac{6\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{8-5\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

(d) Betrachte die Substitution $s = e^t$, d.h. $t = \log(s)$. Dann ist $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{s}$ und wegen $t \in \left[-\frac{\log(3)}{2}, \frac{\log(3)}{2}\right]$ ist $s \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$. Es folgt:

$$\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{s+3}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s + 3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{d}s$$

Laut Abschnitt 11.5 der Vorlesung ist $s \mapsto \arctan(s)$ eine Stammfunktion von $s \mapsto \frac{1}{1+s^2}$. Ferner gilt

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

für alle $s \neq 0$. Eine Stammfunktion von $s \mapsto \frac{s}{s^2+1}$ ist durch $s \mapsto \frac{1}{2}\log\left(1+s^2\right)$ gegeben. Es folgt damit:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s + 3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{d}s &= \left[\arctan(s) + 3\log(s) - \frac{3}{2}\log(1+s^2)\right]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{s=\sqrt{3}} \\ &= \left[\arctan(s) + 3\log\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)\right]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{s=\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 3\left(\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\log(3)\end{aligned}$$

□

Aufgabe 63:

Wir halten zunächst fest, dass jeder angegebene Integrand auf dem jeweiligen abgeschlossenen Integrationsintervall stetig ist und die Integrale deswegen definiert sind.

(a) Mit den Additionstheoremen aus Abschnitt 7.12 der Vorlesung folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t$$

Eine Stammfunktion von $t \mapsto \sin(2t)$ ist durch $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2t)$ gegeben. Es folgt damit:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\left[\cos(2t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(b) Scharfes Hinsehen zeigt, dass $t \mapsto \sqrt{5+2t^4}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{4t^3}{\sqrt{5+2t^4}}$ ist. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\int_0^1 \frac{4t^3}{\sqrt{5+2t^4}}\mathrm{d}t = \left[\sqrt{5+2t^4}\right]_{t=0}^{t=1} = \sqrt{7}-\sqrt{5}$$

(c) Es gilt:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Laut Abschnitt 11.5 der Vorlesung ist $t \mapsto \arctan(t)$ eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ und $t \mapsto -\frac{1}{t}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{t}+\arctan(t)\right]_{t=1}^{t=\sqrt{3}} = 1+\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$$

(d) Scharfes Hinsehen offenbart, dass $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos\left(e^{t^2}\right)$ eine Stammfunktion von $t \mapsto te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)$ ist. Das legt die Regel von der partiellen Integration mit $u(t) = -\frac{1}{2}\cos\left(e^{t^2}\right)$ und $v(t) = e^{t^2}$ für alle $t \in [0,1]$ nahe. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 te^{2t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \underbrace{te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)}_{=u'(t)}\cdot\underbrace{e^{t^2}}_{=v(t)}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(e^{t^2}\right)e^{t^2}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 te^{t^2}\cos\left(e^{t^2}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Weiteres scharfes Hinsehen zeigt, dass $t \mapsto \frac{1}{2}\sin\left(e^{t^2}\right)$ eine Stammfunktion des letzten Integranden ist. Damit folgt mit dem Hauptsatz aus dem Abschnitt 11.4 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left[\cos\left(e^{t^2}\right)e^{t^2}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 te^{t^2}\cos\left(e^{t^2}\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(e^{t^2}\right) - e^{t^2}\cos\left(e^{t^2}\right)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(e) - e\cos(e) - \sin(1) + \cos(1)\right)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 64:

Wir halten zunächst fest, dass in beiden Aufgabenteilen, f stückweise stetig auf $[-a,a]$ ist, und daher alle vorkommenden Integrale erklärt sind.

(a) Nach Abschnitt 11.3 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt:

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t$$

Wir substituieren im ersten Integral nun $s = -t$, d.h. $t = -s$. Es folgt $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$ und $-a = t(a)$ sowie $0 = t(0)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 -f(-s)\mathrm{d}s + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \\
&\overset{f\text{ gerade}}{=} \int_0^a f(s)\mathrm{d}s + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(b) Nach Abschnitt 11.3 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$$

Wir substituieren im ersten Integral nun $s = -t$, d.h. $t = -s$. Es folgt $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$ und $-a = t(a)$ sowie $0 = t(0)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t \quad &= \quad \int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} -f(-s)\mathrm{d}s + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t \\ &\overset{f \text{ ungerade}}{=} \int_{0}^{a} -f(s)\mathrm{d}s + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t) - f(t)\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

□