**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
31.01.2014

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

### Aufgabe 65:

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei $I = \mathbb{R}$, $f = \sin$ und $g = \exp$. Wegen $u_0 = -\log(3)$ bietet es sich an, $J = \tilde{J} = \mathbb{R}$ zu wählen (das größte Intervall, welches $u_0$ enthält und auf dem $g$ das Vorzeichen von $g(u_0) = \frac{1}{3} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von $f$ ist $F = -\cos$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ auf $\tilde{J}$ ist durch $G : \tilde{J} \to G(\tilde{J}) = (-\infty, 0)$ mit $u \mapsto -e^{-u}$ gegeben. Die Umkehrfunktion $G^{-1} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ von $G$ ist durch $t \mapsto \log(\frac{1}{-t})$ gegeben.

Der Satz aus Abschnitt 12.4 der Vorlesung liefert die folgende Aussage: Die Funktion $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(u_0))$$

für alle $t \in \tilde{I}$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $\tilde{I}$. In unserem Fall ist also

$$u(t) = \log\left(\frac{1}{e^{-u_0} + \cos(t) - \cos(t_0)}\right) = \log\left(\frac{1}{2 + \cos(t)}\right)$$

für alle $t \in \tilde{I}$. Dabei ist das Intervall $\tilde{I}$ das größte Teilintervall von $I$ mit $t_0 \in \tilde{I}$ und

$$-\cos(t) - 2 = F(t) - F(t_0) + G(u_0) \in G(\tilde{J}) = R^-$$

für alle $t \in \tilde{I}$. D.h. $\tilde{I} = \{t \in \mathbb{R} : \; -2 - \cos(t) < 0\} = \mathbb{R}$.

Weil $\tilde{I} = I = \mathbb{R}$, ist $u$ die maximale Lösung.

(b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.3 sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto 2t$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto t$. Es gilt

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s = \int_0^t 2s\mathrm{d}s = \left[s^2\right]_{s=0}^{s=t} = t^2$$

sowie

$$\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\mathrm{d}s = \int_0^t s e^{-s^2}\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t^2}\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = u_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{e^{t^2}}{2}\left(1 - e^{-t^2}\right) = e^{t^2} - \frac{1}{2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□

**Aufgabe 66:**

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei $I = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto te^{-t}$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u \mapsto u^2$. Wegen $u_0 = 1$ bietet es sich an, $J = \tilde{J} = \mathbb{R}^+$ zu wählen (das größte Intervall, welches $u_0$ enthält und auf dem $g$ das Vorzeichen von $g(u_0) = 1 > 0$ hat). Eine Stammfunktion von $f$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{t_0}^t f(s)\mathrm{d}s = \int_0^t se^{-s}\mathrm{d}s \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \left[-se^{-s}\right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t e^{-s}\mathrm{d}s = \left[-se^{-s} - e^{-s}\right]_{s=0}^{s=t} = 1 - (1+t)e^{-t} \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ auf $\tilde{J}$ ist durch $G : \tilde{J} \to G(\tilde{J}) = \mathbb{R}^-$ mit $u \mapsto -\frac{1}{u}$ gegeben. Die Umkehrfunktion $G^{-1} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ von $G$ ist durch $G^{-1}(t) = -\frac{1}{t}$ gegeben.

Der Satz aus Abschnitt 12.4 der Vorlesung liefert die folgende Aussage: Die Funktion $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(u_0))$$

für alle $t \in \tilde{I}$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $\tilde{I}$. In unserem Fall ist also

$$u(t) = -\frac{1}{1 - (1+t)e^{-t} - 1} = \frac{e^t}{1+t}$$

für alle $t \in \tilde{I}$. Dabei ist das Intervall $\tilde{I}$ das größte Teilintervall von $I$, mit $t_0 \in \tilde{I}$ und

$$-\frac{1+t}{e^t} = F(t) - F(t_0) + G(u_0) \in G(\tilde{J}) = \mathbb{R}^-$$

für alle $t \in \tilde{I}$. D.h. $\tilde{I} = \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1+t}{e^t} < 0\right\} = (-1, \infty)$.

Es bleibt zu untersuchen, ob $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung ist. Wegen

$$\lim_{t \to -1+} u(t) = \lim_{t \to -1+} \frac{e^t}{1+t} = \infty,$$

lässt sich $u$ nicht stetig (geschweige denn differenzierbar) weiter nach links fortsetzen. In der Tat ist also $u$ die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

(b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.3 sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto t + \frac{2}{(1+t)^2}$. Es gilt

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s = \int_0^t s + \frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}s^2 + 2\arctan(s)\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{t^2}{2} + 2\arctan(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = u_0 e^{A(t)} = e^{\frac{t^2}{2} + 2\arctan(t)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□

**Aufgabe 67:**

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei $I = \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto -t^2$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $u \mapsto \frac{1}{u^3}$. Wegen $u_0 = \sqrt{2}$ bietet es sich an, $J = \tilde{J} = \mathbb{R}^+$ zu wählen (das größte Intervall, welches $u_0$ enthält und auf dem $g$ das Vorzeichen von $g(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von $f$ ist gegeben durch $F(t) = -\frac{t^3}{3}$ für alle $t \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ auf $\tilde{J}$ ist durch $G : \tilde{J} \to G(\tilde{J}) = \mathbb{R}^+$ mit $u \mapsto \frac{u^4}{4}$ gegeben. Die Umkehrfunktion $G^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ von $G$ ist durch $G^{-1}(t) = \sqrt[4]{4t}$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

Der Satz aus Abschnitt 12.4 der Vorlesung liefert die folgende Aussage: Die Funktion $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(u_0))$$

für alle $t \in \tilde{I}$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $\tilde{I}$. In unserem Fall ist also

$$u(t) = \sqrt[4]{4\left(\frac{t_0^3}{3} - \frac{t^3}{3} + 4\right)} = \sqrt{2}\sqrt[4]{1 - \frac{4}{3}t^3}$$

für alle $t \in \tilde{I}$. Dabei ist das Intervall $\tilde{I}$ das größte Teilintervall von $I$, mit $t_0 \in \tilde{I}$ und

$$1 - \frac{t^3}{3} = F(t) - F(t_0) + G(u_0) \in G(\tilde{J}) = R^+$$

für alle $t \in \tilde{I}$. D.h. $\tilde{I} = \left\{t \in \mathbb{R} : 1 - \frac{t^3}{3} > 0\right\} = \left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right)$.

Es bleibt zu untersuchen, ob $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung ist. Wegen

$$\lim_{t \to \sqrt[3]{3}-} u(t) = \lim_{t \to \sqrt[3]{3}-} 1 - \frac{t^3}{3} = 0$$

und da 0 nicht im Definitionsbereich von $g$ liegt, lässt sich $u$ nicht weiter nach rechts fortsetzen. In der Tat ist also $u$ die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

(b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.3 sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto -\frac{4t}{1+t^2}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$. Es gilt

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s = -\int_0^t \frac{4s}{1+s^2}\mathrm{d}s = -2\left[\log(1+s^2)\right]_{s=0}^{s=t} = -2\log(1+t^2) = \log\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s)\mathrm{d}s &= \int_0^t e^{-\log\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)}\frac{s}{1+s^2}\mathrm{d}s = \int_0^t (1+s^2)^2\frac{s}{1+s^2}\mathrm{d}s = \int_0^t s + s^3\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4}\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = u_0 e^{A(t)} + e^{A(t)}\int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s)\mathrm{d}s = \frac{1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}}{(1+t^2)^2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□

**Aufgabe 68:**
Wir halten zunächst fest: Ist $u : I \to \mathbb{R}$ mit $u(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = \frac{1+t}{3u^2(t)} + u(t) \qquad \forall t \in I, \qquad t_0 = 0, u(t_0) = u_0 = \sqrt[3]{\frac{e^3}{9} + \frac{4}{9}},$$

so ist $w : I \to \mathbb{R}$ mit $w(t) = u^3(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$w'(t) = 3u^2(t)u'(t) = (1+t)+3u^3(t) = (1+t)+3w(t) \qquad \forall t \in I, \qquad t_0 = 0, w(t_0) = w_0 = u_0^3 = \frac{e^3}{9}+\frac{4}{9}.$$

Ist Umgekehrt $w : I \to \mathbb{R}$ mit $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$w'(t) = (1+t) + 3w(t) \qquad \forall t \in I, \qquad t_0 = 0, w(t_0) = w_0 = u_0^3 = \frac{e^3}{9} + \frac{4}{9},$$

so ist $u : I \to \mathbb{R}$ mit $u(t) = \sqrt[3]{w(t)}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = \frac{w'(t)}{3\left(\sqrt[3]{w(t)}\right)^2} = \frac{(1+t)+3u^3(t)}{3u^2(t)} = \frac{1+t}{3u^2(t)}+u(t) \qquad \forall t \in I, \qquad t_0 = 0, u(t_0) = u_0 = \sqrt[3]{\frac{e^3}{9} + \frac{4}{9}}.$$

In diesem Sinne sind diese Anfangswertprobleme äquivalent. Insbesondere lassen sich maximale Lösungen, die nie verschwinden, des einen Problems in die des Anderen überführen.
Es handelt sich bei der Differentialgleichung für $w$ um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.3 sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto 3$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto 1+t$. Es gilt

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s = 3t$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\mathrm{d}s &= \int_0^t e^{-3s}(1+s)\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{3}e^{-3s}\right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t se^{-3s}\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \left[-\frac{1}{3}(1+s)e^{-3s}\right]_{s=0}^{s=t} + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3s}\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}+s\right)e^{-3s}\right]_{s=0}^{s=t} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}+t\right)e^{-3t}\right)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
w(t) &= w_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\mathrm{d}s = \left(\frac{e^3}{9}+\frac{4}{9}\right)e^{3t} + e^{3t}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}+t\right)e^{-3t}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{4}{3}\right)e^{3t} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}e^{3t} - \left(\frac{4}{3}+t\right)\right) = \frac{1}{9}\left((8+e^3)e^{3t} - (3t+4)\right)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems für $w$. Falls $w(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, so ist nach Obigem $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = \sqrt[3]{w(t)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}\left((8+e^3)e^{3t} - (3t+4)\right)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, die maximale Lösung des ersten Anfangswertproblems.

Tatsächlich gilt $\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$ und $\lim_{t\to-\infty} w(t) = \infty$ sowie $w'(t) = \frac{1}{9}(3(8+e^3)e^{3t}) - 3)$. Damit hat $w$ bei $t = -\frac{\log(8+e^3)}{3}$ ein globales Minimum. Wegen

$$w\left(-\frac{\log(8+e^3)}{3}\right) = 1 + \log(8+e^3) - 4 = \log(8+e^3) - 3 = \log(8+e^3) - \log(e^3) > 0$$

ist in der Tat $w(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
□

## Aufgabe 69:

Sei zunächst $u : \tilde{I} \to [-1,1]$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. Wegen

$$u'(t) = t\sqrt{1-u^2(t)} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } t \geq 0 \\ \leq 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

ist $u$ monoton wachsend auf $\tilde{I} \cap [0,\infty)$ und monoton fallend auf $\tilde{I} \cap (-\infty, 0]$. D.h., $u$ nimmt sein globales Minimum bei $t = 0$ an. Ist also $u_0 = 1$, so ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems durch $u(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben.
Der Fall $-1 < u_0 < 1$ wird wie folgt behandelt: Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4 sei $I = \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto t$, $J = [-1,1]$ und $g : J \to [0,1]$ mit $u \mapsto \sqrt{1-u^2}$. Wegen $u_0 > -1$ bietet es sich an, $\tilde{J} = (-1,1)$ zu wählen (das größte Teilintervall von $J$, welches $u_0$ enthält und auf dem $g$ das Vorzeichen von $g(u_0) = \sqrt{1-u_0^2} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von $f$ ist gegeben durch $F(t) = \frac{t^2}{2}$ für alle $t \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g} : \tilde{J} \to [1,\infty)$ ist durch $G : \tilde{J} \to G(\tilde{J}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $u \mapsto \arcsin(u)$ gegeben. Die Umkehrfunktion $G^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \tilde{J}$ von $G$ ist durch $t \mapsto \sin(t)$ für alle $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gegeben.
Der Satz aus Abschnitt 12.4 der Vorlesung liefert die folgende Aussage: Die Funktion $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(u_0))$$

für alle $t \in \tilde{I}$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $\tilde{I}$. In unserem Fall ist also

$$u(t) = \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right)$$

für alle $t \in \tilde{I}$. Dabei ist das Intervall $\tilde{I}$ das größte Teilintervall von $I$, mit $t_0 \in \tilde{I}$ und

$$\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0) = F(t) - F(t_0) + G(u_0) \in G(\tilde{J}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in \tilde{I}$. D.h.

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \left\{ t \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\arcsin(u_0)}_{>-\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} : \frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0) < \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \left\{ t \in \mathbb{R} : |t| < \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_0)} \right\}.\end{aligned}$$

Es bleibt zu untersuchen, ob $u : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung ist. Sei $a := \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_0)} > 0$. Wegen

$$\lim_{t\to -a+} u(t) = \lim_{t\to a-} u(t) = \lim_{t\to a-} \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

und der eingangs festgestellten Monotonie jeder Lösung auf $\mathbb{R}_0^-$ bzw. $\mathbb{R}_0^+$, ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) & \text{für } |t| < a \\ 1 & \text{für } |t| \geq a \end{cases}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ der einzige Kandidat für die maximale Lösung. Es bleibt zu untersuchen, ob das so definierte $u$ in $-a$ und $a$ differenzierbar ist. Da $u$ gerade ist, reicht es die Differenzierbarkeit in $a$ zu untersuchen. Nach Obigem ist $u$ stetig in $a$. Ferner gilt

$$\lim_{t\to a-} u'(t) = \lim_{t\to a-} 2t\cos\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) = 2a\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 = \lim_{t\to a+} u'(t).$$

Nach Satz 10.12 der Vorlesung ist $u$ differenzierbar in $-a$ und $a$. Wegen $u'(-t) = u'(t) = 0 = 2a\sqrt{1-u^2(t)} = 2a \cdot g(u(t))$ für alle $t \geq a$, erfüllt $u$ auch die Differentialgleichung und ist damit die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

Der letzte zu untersuchende Fall ist $u_0 = -1$. Klar: eine Lösung des Anfangswertproblems ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(t) = -1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Angenommen, es gibt eine weitere Lösung des Anfangswertproblems mit $u(t_1) := u_1 > -1$ für ein $t_1 \neq 0$. Wir denken uns dabei $u$ gleich auf das größte Intervall fortgesetzt, auf der sie eindeutig ist. O.B.d.A. sei $t_1 > 0$ (der Fall $t_1 < 0$ wird genauso behandelt). Ferner sei O.B.d.A. $u_1 < 1$ (Zwischenwertsatz 8.9). Trennung der Veränderlichen liefert dann (siehe Rechnung für den Fall $-1 < u_0 < 1$)

$$u(t) = \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \arcsin(u_1)\right)$$

für alle $t \in \tilde{I}$. Dabei ist $\tilde{I}$ das größte Intervall mit $t_1 \in \tilde{I}$ und

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \arcsin(u_1) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in \tilde{I}$. Für $t \geq t_1 > 0$ gilt:

$$-\frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\arcsin(u_1)}_{>-\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t < \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_1) + t_1^2} =: b_1$$

Angenommen, $t_1 < \sqrt{2\arcsin(u_1) + \pi}$. Dann wäre für alle $t < b_1$

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin(u_1) - \frac{t_1^2}{2} \leq \frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \arcsin(u_1) < \frac{\pi}{2}$$

und damit $0 \in \tilde{I}$. Dann aber auch

$$-1 = u_0 = u(0) = \sin\left(\underbrace{\arcsin(u_1) - \frac{t_1^2}{2}}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right),$$

im Widerspruch zu $\sin(s) = -1 \Leftrightarrow s \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Also muss die Annahme verworfen werden und es ist $t_1 \geq \sqrt{2\arcsin(u_1) + \pi}$. Für $0 < t < t_1$ gilt

$$-\frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2}}_{<0} + \underbrace{\arcsin(u_1)}_{<\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t > \sqrt{\underbrace{t_1^2 - (2\arcsin(u_1) + \pi)}_{\geq 0}} =: a_1 \geq 0$$

Wie im Fall $-1 < u_0 < 1$ sieht man, dass die Lösung nach rechts und links eindeutig zu

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq t \leq a_1 \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \arcsin(u_1)\right) & \text{für } a_1 < t < b_1 \\ 1 & \text{für } b_1 \leq t \end{cases}$$

für alle $t \in [0, \infty)$ fortgesetzt werden kann.
Gleiche Argumentation im Falle $t_1 < 0$ liefert $t_1 \leq -\sqrt{2\arcsin(u_1) + \pi}$ und

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq a_2 \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} + \arcsin(u_1)\right) & \text{für } a_2 < t < b_2 \\ 1 & \text{für } b_2 \leq t \end{cases}$$

für alle $t \in (-\infty, 0]$ mit $a_2 = -\sqrt{\pi - 2\arcsin(u_1) + t_1^2}$ und $b_2 = -\sqrt{t_1^2 - (2\arcsin(u_1) + \pi)}$.
Insgesamt ist die Lösung des Anfangswertproblems für $u_0 = -1$ nicht eindeutig. Jede Lösung hat aber die Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq -\sqrt{2\pi + t_1} \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } -\sqrt{2\pi + t_1} < t \leq -t_1 \\ -1 & \text{für } -t_1 < t \leq t_2 \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } t_2 < t \leq \sqrt{2\pi + t_2} \\ 1 & \text{für } \sqrt{2\pi + t_2} \leq t \end{cases}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit beliebigen Konstanten $t_1, t_2 \in [0, \infty]$.
□