Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
07.02.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 70:

(a) Sei $b > 2$. Es gilt:

$$\int_2^b \frac{1}{t(\log(t))^2}\mathrm{d}t \overset{t=e^s}{\underset{\mathrm{d}t=t\mathrm{d}s}{=}} \int_{\log(2)}^{\log(b)} \frac{1}{s^2}\mathrm{d}s = -\left[\frac{1}{s}\right]_{s=\log(2)}^{s=\log(b)} = \frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(b)}$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{t(\log(t))^2}\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\int_2^\infty \frac{1}{t(\log(t))^2}\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{t(\log(t))^2}\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(b)}\right) = \frac{1}{\log(2)}$$

(b) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \underbrace{e^{st}}_{u'(t)}\underbrace{\cos(tx)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}\left[e^{st}\cos(tx)\right]_{t=0}^{t=b} + \frac{x}{s}\int_0^b \underbrace{e^{st}}_{u'(t)}\underbrace{\sin(tx)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}\left[e^{st}\sin(xt)\right]_{s=0}^{s=b} - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}e^{sb}\sin(xb) - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Addieren von $\frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t$ auf beiden Seiten („*Phönix aus der Asche*“™) liefert

$$\left(1+\frac{x^2}{s^2}\right)\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t = \frac{s^2+x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t = \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}e^{sb}\sin(bx)$$

und damit

$$\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t = -\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx).$$

Wegen

$$\left|e^{sb}\cos(bx)\right| \le e^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0 \qquad \text{sowie} \qquad \left|e^{sb}\sin(bx)\right| \le e^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx)\right) \\
&= -\frac{s}{s^2+x^2}
\end{aligned}$$

(c) Wir untersuchen den Integranden „in der Nähe der unteren Grenze“. Es ist

$$\log(t) \leq \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh (vgl. Abschnitt 9.7 der Vorlesung)

$$\begin{aligned} 0 < \sinh(t) - t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} - t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n+3} = t^3 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n}}_{=:h(t)>0} \end{aligned}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{e}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist stetig (vgl. Abschnitt 8.7 der Vorlesung). Nach Satz 8.15 der Vorlesung, existiert ein $M > 0$ mit $0 < h(t) \leq M$ für alle $0 \leq t \leq \frac{1}{e}$.

Also ist

$$-\frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t} \geq \frac{t\log(e)}{t^3 h(t)} \geq \frac{1}{t^2 M}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{e}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^2 M} \mathrm{d}t = -\frac{1}{M}\left[\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=\frac{1}{e}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a} - e\right) \xrightarrow{a \to 0+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^2 M} \mathrm{d}t$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Abschnitt 13.7 (3) der Vorlesung ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t} \mathrm{d}t$$

divergent. Nach Satz und Definition aus Abschnitt 13.4 der Vorlesung ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t} \mathrm{d}t$$

ebenfalls divergent.

□

Aufgabe 71:

(a) Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sin(t)}$ auf $(0, \pi)$ ist durch $F : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) = \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

für alle $t \in (0, \pi)$ gegeben (vgl. Aufgabe 60 (d) auf dem Übungsblatt 11). Sei nun $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Es gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \left[\log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \log(t)\right]_{t=a}^{t=\frac{\pi}{2}} = \log\left(\frac{2}{\pi}\right) - \log\left(\frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{a}\right)$$

Sowie:

$$\lim_{a\to 0}\log\left(\frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{a}\right)\overset{\text{Stetigkeit}}{=}\log\left(\lim_{a\to 0}\frac{\overbrace{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{a}_{\to 0}}\right)\overset{\text{l'Hospital}}{=}\log\left(\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\underbrace{1}_{\neq 0}}\right)=-\log(2)$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\lim_{a\to 0+}\int_a^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\log\left(\frac{2}{\pi}\right)+\log(2)=\log\left(\frac{4}{\pi}\right).$$

(b) Nach der Definition aus Abschnitt 13.4 der Vorlesung ist das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1}\log(|t|)\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-1}^{0}\log(|t|)\mathrm{d}t$ und $\int_0^1\log(|t|)\mathrm{d}t$ konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\int_{-1}^{1}\log(|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\log(|t|)\mathrm{d}t+\int_0^1\log(|t|)\mathrm{d}t.$$

Sei $0<a<1$. Wegen

$$\int_{-1}^{-a}\log(|t|)\mathrm{d}t\overset{s=-t}{=}\int_a^1\log(s)\mathrm{d}s=\int_a^1\log(|t|)\mathrm{d}t$$

reicht es, nur eins der beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz zu untersuchen. Es gilt

$$\int_a^1\log(t)\mathrm{d}t=[t\log(t)-t]_{t=a}^{t=1}=(-1-a\log(a)+a)$$

sowie

$$\lim_{a\to 0+}(a-a\log(a))=\lim_{a\to 0+}a\log\left(\frac{1}{a}\right)=\lim_{a\to 0+}\frac{\log\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{\underbrace{x}_{\to\infty}}\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Folglich ist $\int_0^1\log(|t|)\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\int_0^1\log(|t|)\mathrm{d}t=\lim_{a\to 0+}\int_a^1\log(|t|)\mathrm{d}t=-1$$

und damit

$$\int_{-1}^{1}\log(|t|)\mathrm{d}t=-2.$$

(c) Sei $a<3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^3\frac{e^{2t}}{1+e^t}\mathrm{d}t\ &\underset{\mathrm{d}s=s\mathrm{d}t}{\overset{s=e^t}{=}}\int_{e^a}^{e^3}\frac{s^2}{1+s}\frac{1}{s}\mathrm{d}s=\int_{e^a}^{e^3}\frac{1+s-1}{1+s}\mathrm{d}s\\ &=\int_{e^a}^{e^3}1-\frac{1}{1+s}\mathrm{d}s=[s-\log(1+s)]_{s=e^a}^{s=e^3}\\ &=e^3-\log(1+e^3)-e^a+\log(1+e^a)\xrightarrow{a\to-\infty}e^3-\log(1+e^3)\end{aligned}$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{3}\frac{e^{2t}}{1+e^t}\mathrm{d}t$ konvergent und es ist

$$\int_{-\infty}^{3}\frac{e^{2t}}{1+e^t}\mathrm{d}t=e^3-\log(1+e^3)$$

□

Aufgabe 72:

(a) Für alle $0 < t \leq 1$ gilt
$$t^2 < t < \sqrt{t}.$$
Damit folgt
$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{t} + \underbrace{(\sqrt{t}-t^2)}_{>0}} < \frac{1}{\sqrt{t}}$$
für alle $0 < t \leq 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt:
$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\left[\sqrt{t}\right]_{t=a}^{t=1} = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} = 2$$
Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 13.7 der Vorlesung ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\mathrm{d}t$ (absolut) konvergent.

(b) Sei $b > 0$. Es gilt:
$$\int_0^b \underbrace{e^{-t}}_{u'(t)}\underbrace{\log(1+t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-t}\log(1+t)\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b e^{-t}\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = -\frac{\log(1+b)}{e^b} + \int_0^b e^{-t}\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$
Wegen
$$\lim_{b\to\infty}\frac{\log(1+b)}{\underbrace{e^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty}\frac{1}{(1+b)e^b} = 0$$
ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-t}\log(1+t)\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 13.7 der Vorlesung, weil für alle $0 \leq t < \infty$
$$e^{-t}\frac{1}{1+t} \leq e^{-t}$$
gilt, und
$$\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\mathrm{d}t \lim_{b\to\infty} -\left[e^{-t}\right]_{t=0}^{t=b} = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

(c) Sei $0 < a < 1$. Es gilt:
$$\int_a^1 (\log(t))^4\mathrm{d}t \underset{\mathrm{d}t=-t\mathrm{d}s}{\overset{t=e^{-s}}{=}} -\int_{-\log(a)}^0 s^4e^{-s}\mathrm{d}s = \int_0^{\log\left(\frac{1}{a}\right)} s^4e^{-s}\mathrm{d}s$$
Wegen $\lim_{a\to 0+}\log\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^1(\log(t))^4\mathrm{d}t$ konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty s^4e^{-s}\mathrm{d}s$ konvergent ist. Dies ist nach Abschnitt 13.7 der Vorlesung tatsächlich der Fall.

□

Aufgabe 73:

(a) Wir betrachten eine Fallunterscheidung: Ist $s \leq 0$, so ist für alle $n \geq 2$

$$\frac{1}{n(\log(n))^s} = \frac{(\log(n))^{-s}}{n} \geq \frac{(\log(2))^{-s}}{n}$$

und damit die Reihe $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log(n))^s}$ divergent nach dem Minorantenkriterium aus Abschnitt 7.4 der Vorlesung.

Sei also $s > 0$. Betrachte die Funktion $f_s : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_s(t) = \frac{1}{t(\log(t))^s} = e^{-(\log(t)+s\log(\log(t))}$$

für alle $t \in (1, \infty)$. Klar: f_s ist streng monoton fallend. Ferner hat f_s eine Stammfunktion $F_s : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\begin{aligned} F_s(x) &= \int_2^x f_s(t)\mathrm{d}t = \int_2^x \frac{1}{t(\log(t))^s}\mathrm{d}t \overset{u=\log(t)}{\underset{\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{=}} \int_{\log(2)}^{\log(x)} \frac{1}{u^s}\mathrm{d}u \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{u^{s-1}}\right]_{u=\log(2)}^{u=\log(x)} = \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{(\log(x))^{s-1}} - \frac{1}{(\log(2))^{s-1}}\right) & \text{für } s \neq 1 \\ [\log(u)]_{u=\log(2)}^{u=\log(x)} = \log(\log(x)) - \log(\log(2)) & \text{für } s = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

für alle $x \in (1, \infty)$ gegeben ist.

Sei nun $s > 1$. Wegen der Monotonie von f_s gilt für alle $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} S_N &:= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\log(n))^s} = \frac{1}{2(\log(2))^s} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(\log(n))^s} \overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{1}{2(\log(2))^s} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^s} \\ &= \frac{1}{2(\log(2))^s} + \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^s}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(\log(2))^s} + \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} f_s(n+1)\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2(\log(2))^s} + \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} f_s(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2(\log(2))^s} + \int_2^N f_s(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2(\log(2))^s} + F_s(N) \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{N\to\infty} F_s(N) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{(\log(N))^{s-1}} - \frac{1}{(\log(2))^{s-1}}\right) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{(\log(2))^{s-1}} \in \mathbb{R},$$

ist $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt und die Reihe konvergent nach dem Monotoniekriterium aus Abschnitt 7.2 der Vorlesung.

Sei nun $s \leq 1$. Wegen der Monotonie von f_s gilt für alle $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\log(n))^s} = \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{n(\log(n))^s}\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} f_s(n)\mathrm{d}t \\ &\geq \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} f_s(t)\mathrm{d}t = \int_2^{N+1} f_s(t)\mathrm{d}t = F_s(N+1) \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{N\to\infty} F_s(N) = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\lim_{N\to\infty}\left((\log(N))^{1-s} - (\log(2))^{1-s}\right) & \text{für } s < 1 \\ \lim_{N\to\infty} \log(\log(N)) - \log(\log(2)) & \text{für } s = 1 \end{cases} = \infty$$

ist $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt und die Reihe divergent.

(b) Sei $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \frac{1}{\log(t)^{\log(t)}} = e^{-\log(\log(t))\log(t)}$$

für alle $t \in (1, \infty)$. Klar: f ist streng monoton fallend. Sei $N > e^{e^2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
S_N \quad &:= \quad \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{\log(n)^{\log(n)}} \overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{\log(n+1)^{\log(n+1)}} = \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{\log(n+1)^{\log(n+1)}} \mathrm{d}t \\
&= \quad \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} f(n+1) \mathrm{d}t \le \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t) \mathrm{d}t = \int_2^N f(t) \mathrm{d}t = \int_2^N e^{-\log(\log(t))\log(t)} \mathrm{d}t \\
&\underset{\mathrm{d}t = t\mathrm{d}s}{\overset{t=e^s}{=}} \quad \int_{\log(2)}^{\log(N)} e^{s - \log(s)s} \mathrm{d}s = \int_{\log(2)}^{e^2} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s + \int_{e^2}^{\log(N)} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s \\
&\le \quad \int_{\log(2)}^{e^2} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s + \int_{e^2}^{\log(N)} e^{s(1-\log(e^2))} \mathrm{d}s \\
&= \quad \int_{\log(2)}^{e^2} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s + \int_{e^2}^{\log(N)} e^{-s} \mathrm{d}s = \int_{\log(2)}^{e^2} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s - \left[e^{-s}\right]_{s=e^2}^{s=\log(N)} \\
&= \quad \int_{\log(2)}^{e^2} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s + e^{-e^2} - \frac{1}{N} \le \int_{\log(2)}^{e^2} e^{s(1-\log(s))} \mathrm{d}s + e^{-e^2} < \infty
\end{aligned}$$

Also ist $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ beschränkt und die Reihe konvergent nach dem Monotoniekriterium aus Abschnitt 7.2 der Vorlesung.

□

Aufgabe 74:
Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe Abschnitt 12.5 der Vorlesung). Wir machen den Ansatz

$$u_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned}
u_p{\prime}(t) \quad &= \quad \omega_0 \left(-A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\
u_p''(t) \quad &= \quad \omega_0^2 \left(-A\cos(\omega_0 t) - B\sin(\omega_0 t)\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
u_p''(t) + 2\gamma u_p'(t) + \omega_0^2 u_p(t) \quad &= \quad \left(-A\omega_0^2 + B2\gamma\omega_0 + A\omega_0^2\right)\cos(\omega_0 t) + \left(-B\omega_0^2 - A2\gamma\omega_0 + B\omega_0^2\right)\sin(\omega_0 t) \\
&= \quad 2\gamma\omega_0 B\cos(\omega_0 t) - 2\gamma\omega_0 A\sin(\omega_0 t) \\
&\overset{!}{=} \quad \sin(\omega_0 t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $B = 0$ und $A = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}$ erfüllt. Also ist

$$u_p(t) = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

Als nächstes bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{<0}} = -\gamma \pm \mathrm{i}\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=:\omega}$$

Nach Abschnitt 12.5 der Vorlesung ist also

$$u_h(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega t) + B_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$u''(t) + 2\gamma u'(t) + \omega^2 u(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega t) + B_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega t) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

gegeben, wobei die Konstanten A_1 und B_1 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$u(0) = A_1 \stackrel{!}{=} u_0 = 1$$

und wegen

$$u'(t) = -\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega t) - \omega e^{-\gamma t}\sin(\omega t) - B_1\gamma e^{-\gamma t}\sin(\omega t) + B_1\omega e^{-\gamma t}\cos(\omega t) - \frac{1}{2\gamma}\cos(\omega_0 t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ist

$$u'(0) = -\gamma + B_1\omega - \frac{1}{2\gamma} \stackrel{!}{=} u_1 = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{1 + 2\gamma^2}{2\gamma\omega}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$u(t) = e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2 t}\right) + \frac{1 + 2\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2 t}\right) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\sin(\omega_0 t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Aufgabe 75:

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe Abschnitt 12.5 der Vorlesung). Wir machen den Ansatz

$$u_p(t) = Ae^{2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} u_p{'}(t) &= 2Ae^{2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ u_p''(t) &= 4Ae^{2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$u_p''(t) + 2u_p'(t) + u_p(t) = 4Ae^{2t} + 2 \cdot 2Ae^{2t} + Ae^{2t} = 9Ae^{2t} \stackrel{!}{=} e^{2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist für $A = \frac{1}{9}$ erfüllt. Also ist

$$u_p(t) = \frac{1}{9}e^{2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.
Als nächstes bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Nach Abschnitt 12.5 der Vorlesung ist also

$$u_h(t) = A_1 e^{-t} + B_1 t e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A_1 e^{-t} + B_1 t e^{-t} + \frac{1}{9} e^{2t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

gegeben, wobei die Konstanten A_1 und B_1 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$u(0) = A_1 + \frac{1}{9} \stackrel{!}{=} u_0 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{8}{9}$$

und wegen

$$u'(t) = -\frac{8}{9} e^{-t} - B_1 t e^{-t} + B_1 e^{-t} + \frac{2}{9} e^{2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ist

$$u'(0) = -\frac{8}{9} + B_1 + \frac{2}{9} = B_1 - \frac{6}{9} \stackrel{!}{=} u_1 = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{6}{9}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$u(t) = \frac{8}{9} e^{-t} + \frac{6}{9} t e^{t} + \frac{1}{9} e^{2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□