Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS2013/14
14.02.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 76:

(a) Sei $U := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\right\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung, um zu überprüfen, ob U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

- $0 \in U$: Wegen $0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 0 < \infty$, ist in der Tat $0 \in U$.
- Seien $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$: Wegen
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \overset{7.4}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|}_{<\infty} < \infty$$
und
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$
ist in der Tat $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$.

$\square$

(b) Sei $V := \left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\right\}$ und $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ definiert durch
$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = -x$$
für alle $x \in [-1, 1]$. Wegen $f(-1) = g(0) = 0$, ist $f, g \in V$. Aber $f + g \equiv 1$, d.h. für alle $x \in [-1, 1]$ gilt
$$(f + g)(x) = 1 \neq 0.$$
Also $f + g \notin V$. Nach dem Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung ist V kein Unterverktorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$.

$\square$

Aufgabe 77:

(a) Sei $U := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a_n = a\right\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung, um zu überprüfen, ob U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

- $0 \in U$: Wegen $0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ist $0 \in U \Leftrightarrow a = 0$. Sei also im Folgenden $a = 0$.

- Seien $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$: Wegen
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0 = a$$
und
$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0 = a$$
ist in der Tat $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$.

Also ist U genau für $a = 0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

□

(b) Sei $V := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f(0) = 0 \right\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung, um zu überprüfen, ob V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist.

- $0 \in V$: Wegen $0 = f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ und damit $f(0) = 0$, ist $0 \in V$.
- Seien $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $f + g \in V$ und $\alpha f \in V$: Wegen
$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$
und
$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$$
ist in der Tat $f + g \in V$ und $\alpha f \in V$.

□

Aufgabe 78:

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{3} \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot 2 \quad \cdot \frac{7}{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung $(r = n)$, sind die Zeilen von A damit linear unabhängig.

□

Aufgabe 79:

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 4$, für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$. Ansonsten ist $r = 3$. Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ gilt. Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha = 10$ aber $\beta \neq 4$, so ist

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\beta - 4} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha \neq 10$, so sei $\kappa = \frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha - 10} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B.

□

Aufgabe 80:

Wir zeigen vorbereitend, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Nach dem Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung ist zu zeigen:

- $0 \in U$: dies ist klar.
- Für alle $x, y \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$: Es gilt in der Tat

  $$(x+y)_1 + (x+y)_2 - (x+y)_3 - (x+y)_4 = \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}_{=0} = 0$$

  sowie

  $$(\alpha x)_1 + (\alpha x)_2 - (\alpha x)_3 - (\alpha x)_4 = \alpha \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} = 0.$$

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} (-3)+2-(-3)-2 &= 0 \quad (u_1) \\ 3+(-1)-1-1 &= 0 \quad (u_2) \\ -7+3-(-7)-3 &= 0 \quad (u_3) \end{aligned}$$

und damit $u_1, u_2, u_3 \in U$. Sei nun $x \in \operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$. Es existieren also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Da nach Obigem U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und $u_1, u_2, u_3 \in U$, liegt auch ihre Linearkombination x in U.

(b) Zuerst zeigen wir, dass die Menge $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig ist. Dazu schreiben wir die Vektoren u_1, u_2, u_3 als Zeilen der Matrix A und bringen diese auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot\frac{3}{7} \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{7} & -2 & \frac{16}{7} \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \mid \cdot 7 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 16 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \mid -\frac{1}{10} \sim \begin{pmatrix} -7 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit in der Tat linear unabhängig.

Als nächstes sehen wir ein, dass $\operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) = U$ ist. Dazu stellen wir fest, dass $U \neq \mathbb{R}^4$, denn

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U.$$

Also ist $\dim U < 4$, denn ansonsten wäre $\dim \mathbb{R}^4 \leq \dim U = 4 < \infty$, $U \subseteq \mathbb{R}^4$ und damit, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung, $U = \mathbb{R}^4$.

Dann ist also $\dim U \leq 3 = \dim \operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$, $\operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$ nach Teilaufgabe (a) und damit, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung, $U = \operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$.

$\square$

Aufgabe 81:

(a) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und der Nullvektor $0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 =: u$ sei als eine Linearkombination von u_1, u_2 geschrieben. Wir haben zu zeigen: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned} u(0) &= \alpha_1 u_1(0) + \alpha_2 u_2(0) = \alpha_1 \underbrace{e^{-\gamma\cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cosh(\kappa\cdot 0)}_{=1} + \alpha_2 e^{-\gamma\cdot 0} \frac{1}{\kappa} \underbrace{\sinh(\kappa\cdot 0)}_{=0} = \alpha_1 = 0 \\ u'(0) &= \underbrace{\alpha_1}_{=0} u_1'(0) + \alpha_2 u_2'(0) = \alpha_2 \left(\underbrace{e^{-\gamma\cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cosh(\kappa\cdot 0)}_{=1} - \frac{\gamma}{\kappa} e^{-\gamma\cdot 0} \underbrace{\sinh(\kappa\cdot 0)}_{=0} \right) = \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

$\square$

(b) Wir zeigen zunächst $U := \mathrm{lin}(\{u_1, u_2\}) \subseteq V := \mathrm{lin}(\{v_1, v_2\})$: Sei dazu $u \in U$ beliebig. Es existieren dann $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) = \alpha_1 e^{-\gamma t}\cosh(\kappa t) + \alpha_2 e^{-\gamma t}\frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa t) \\
&= \alpha_1 e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2}\right) + \frac{\alpha_2}{\kappa} e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2}\right) \\
&= e^{-\gamma t}\left(\frac{\kappa\alpha_1 + \alpha_2}{2\kappa} e^{\kappa t} + \frac{\kappa\alpha_1 - \alpha_2}{2\kappa} e^{-\kappa t}\right) = \underbrace{\frac{\kappa\alpha_1 + \alpha_2}{2\kappa}}_{=:\beta_1} e^{(-\gamma+\kappa)t} + \underbrace{\frac{\kappa\alpha_1 - \alpha_2}{2\kappa}}_{=:\beta_2} e^{(-\gamma-\kappa)t} \\
&= \beta_1 v_1(t) + \beta_2 v_2(t)
\end{aligned}$$

Also ist u auch eine Linearkombination der v_1, v_2. Da u beliebig war, gilt in der Tat $U \subseteq V$.

Nach Teilaufgabe (a) ist $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig. Damit ist $\dim V \leq 2 = \dim U$. Nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung gilt damit $U = V$.

□