Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
20.10.2014

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien A und B beliebige Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $A \vee \neg A$.

b) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$.

c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

d) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

e) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

f) (Fallunterscheid.) $\big[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big] \Leftrightarrow B$.

g) (Kontraposition) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

h) (Widerspruchsbeweis) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Aufgabe 2 (Tutorium)

a) Seien A, B und C beliebige Aussagen. Stellen Sie für die folgenden Aussagen Wahrheitstafeln auf, um zu entscheiden, wann diese wahr sind. Ist (ii) wahr für die Aussagen A: "5 ist eine Primzahl.", B: "Barack Obama ist deutscher Bundeskanzler." und C: "Die Hauptstadt von Norwegen ist Stockholm."?

(i) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$.

(ii) $[(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$.

b) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen, sodass sie aussehen wie in **a)**. Danach negieren und vereinfachen Sie die Aussage, um sie zuletzt wieder in Umgangssprache zu übersetzen.

(i) Die Physikstudenten geben nicht auf, solange sie die Aussagen nicht sowohl negiert als auch übersetzt haben.

(ii) Es gibt einen Dozenten, der allen Studenten unsympathisch ist oder dem alle Studenten unsympathisch sind.

Aufgabe 3 (Übung)

a) Beweisen Sie die zweite *De Morgansche Regel*: Für beliebige Mengen M_1, M_2 und Q gilt

$$Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

Hinweis: Die De Morganschen Regeln gelten auch für mehr als zwei Mengen M_i, $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

b) Bestimmen Sie alle Elemente der Menge $Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n\mathbb{Z} := \{nz : \ z \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$zRw :\Leftrightarrow (z - w \in n\mathbb{Z})$$

für $z, w \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation R gegeben ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[0]_R$. Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen von R gibt es?

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (Tutorium)

a) Seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) $M_1 \subseteq M_2$, (ii) $M_1 \cap M_2 = M_1$, (iii) $M_1 \cup M_2 = M_2$.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen R Äquivalenz- bzw. Ordnungsrelationen sind. Dabei seien M und N nichtleere Mengen sowie (z_1, n_1) und (z_2, n_2) Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

(i) $MRN :\Leftrightarrow (M \subseteq N)$. (ii) $MRN :\Leftrightarrow (M \cap N \neq \emptyset)$.

(iii) $(z_1, n_1)R(z_2, n_2) :\Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

Aufgabe 5 (Übung)

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, deren Komposition wir mit $g \circ f =: h : X \to Z$ bezeichnen.

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sind f und g injektiv/surjektiv/bijektiv, so ist auch h injektiv/surjektiv/bijektiv.

(ii) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(iii) Ist h injektiv, so ist auch f injektiv.

b) Widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch je ein Gegenbeispiel.

(i) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.

(ii) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Seien $M_1 := \{1, 2, 4\}$ und $M_2 := \{3, 5, 7, 11\}$. Geben Sie, wenn möglich, eine injektive, eine surjektive und eine bijektive Abbildung von M_1 nach M_2 bzw. von M_2 nach M_1 an und begründen Sie andernfalls, warum eine solche nicht existiert. Was müssten zwei endliche Mengen erfüllen, damit eine bijektive Abbildung zwischen Ihnen existiert?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f, gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{1-x},$$

bijektiv ist.

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm1phys2014w/`.
- Sprechzeiten von Dr. Schmoeger: Dienstags, 10-11 Uhr (Raum 3A-25) oder nach Vereinbarung per E-Mail (christoph.schmoeger@kit.edu).
- Sprechzeiten von Sebastian Schwarz: Mittwochs, 14-16 Uhr (Raum 3A-28) oder nach Vereinbarung per E-Mail (sebastian.schwarz2@kit.edu).

Übungsbetrieb

- **WICHTIG**: Anmeldung für die Tutorien bis zum **24.10.2014** um **20 Uhr** unter **`http://www.redseat.de/kit-phys/`**. Die Einteilung wird am Samstag, den 25.10.2014, per E-Mail verschickt.
- Übungsblätter erscheinen wöchentlich (montags) auf obiger Webseite und ausgedruckt im dritten Stockwerk des Allianzgebäudes. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der folgenden Woche besprochen.

Klausur

- Eine Probeklausur, die nur für Studierende mit Scheinpflicht (Anmeldung bei Dr. Nagato-Plum) obligatorisch ist, findet am 24.01.2015 von 8 bis 10 Uhr im Gerthsen-Hörsaal (Geb. 30.21) statt.
- Die **Modulprüfung** findet am **04.03.2015** von **8 bis 10 Uhr** statt. Anmeldeschluss ist der **13.02.2015**.