HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

2. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 7 (ÜBUNG)

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A+B := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A, b \in B : x = a+b\}.$$

Beweisen Sie, dass die Menge $A+B$ ebenfalls beschränkt ist mit

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

AUFGABE 8 (TUTORIUM)

a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gilt.

$$(i) |x+2| > |x-3|. \quad (ii) |2-|2-x|| \leq 1. \quad (iii) |x-4| > x^2.$$

b) Bestimmen Sie, falls existent, jeweils das Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen.

$$(i) A := \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}. \quad (ii) B := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\}. \quad (iii) C := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}.$$

AUFGABE 9 (ÜBUNG)

a) Beweisen Sie den Binomischen Satz, also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

Zeigen Sie induktiv, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

AUFGABE 10 (TUTORIUM)

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

(iii) Es gilt $2^n \geq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

b) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n .

Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.

Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \dots, P_{n+1}$ mit $n + 1$ Pferden entfernen wir ein Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \dots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das entfernte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen ein anderes Pferd aus der Gruppe. Die Gruppe enthält nun wieder n Pferde, zum Beispiel $P_1, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie zum Beispiel P_1 . Somit haben alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe.

AUFGABE 11 (ÜBUNG)

a) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p . Zeigen Sie, dass dann auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p ist.

b) Zerlegen Sie das Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, gegeben durch

$$p(z) = z^4 + (1 + i)z^3 + (6 + i)z^2 + 6z,$$

in Linearfaktoren.

AUFGABE 12 (TUTORIUM)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) $z_1 := \frac{1}{(i+1)^2}$.

(ii) $z_2 := \frac{3+4i}{1-2i}$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i|\}$.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z^2 \leq 2\}$.

c) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

(i) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

(ii) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.